

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Соловьев Дмитрий Александрович
Должность: ректор ФГБОУ ВО Вавиловский университет
Дата подписания: 18.08.2019
Уникальный программный ключ:
528682d78e671e566ab0770161ba2172f735a12

Приложение 1



МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет
имени Н.И. Вавилова»

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

Г.Н. Камышова /Камышова Г.Н./

« 27 » августа 2019 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Дисциплина	Прикладная математика по технологии перерабатывающих производств в АПК
Направление подготовки	35.03.07 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции
Направленность (профиль)	Технологии перерабатывающих производств в АПК
Квалификация выпускника	Бакалавр
Нормативный срок обучения	4 года
Форма обучения	Очная
Кафедра-разработчик	Математика, механика и инженерная графика
Ведущий преподаватель	Кириллова Т.В., доцент

Разработчик(и): доцент, Кириллова Т. В.

Кириллова Т.В.
(подпись)

Саратов 2019

Содержание

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП
2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания
3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.....
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы их формирования

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП

В результате изучения дисциплины «Прикладная математика по технологии перерабатывающих производств в АПК» обучающиеся, в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 35.03.07 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от № от 17.07.2017 г. № 669, формируют следующие компетенции:

- «Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин с применением информационно-коммуникационных технологий» (ОПК-1).

Формирование компетенций в процессе изучения дисциплины «Прикладная математика по технологии перерабатывающих производств в АПК»

Компетенция		Структурные элементы компетенции (в результате освоения дисциплины обучающийся должен знать, уметь, владеть)	Этапы формирования компетенции в процессе освоения ОПОП (семестр)*	Виды занятий для формирования компетенции	Оценочные средства для оценки уровня сформированности компетенции
Код	Наименование				
1	2	3	4	5	6
ОПК-1	«Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин с применением информационно-коммуникационных технологий»	<p>знает: основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии,.</p> <p>умеет: применять полученные теоретические знания для решения учебных задач по математике, а также осуществлять математические постановки простейших прикладных задач, выбирать методы их решения и интерпретировать получаемые результаты</p> <p>владеет: основными методами решения математических задач с применением информационно-коммуникационных технологий</p>	2	лекции, /практические занятия	Доклад/ тестовые задания/типовой расчет/ /контрольная работа, устный опрос, письменный опрос
ОПК-1	«Способен решать типовые задачи профессиональной дея-	знает: основные понятия и методы, теории дифференциальных уравнений, вероятности и математической статистики	3	лекции, /практические/за	Доклад/ тестовые задания/типовой расчет/ /контрольная

	тельности на основе знаний основных законов математических, естественно-научных и общепрофессиональных дисциплин с применением информационно-коммуникационных технологий»	умеет: применять полученные теоретические знания для решения учебных задач по математике, а также осуществлять математические постановки простейших прикладных задач, выбирать методы их решения и интерпретировать получаемые результаты		нятие	работа
		владеет: основными методами решения математических задач с применением информационно-коммуникационных технологий			

Компетенция ОПК-1– также формируется в ходе освоения дисциплин: информатика; физика; неорганическая и аналитическая химия; органическая химия; физическая и коллоидная химия; биохимия; технические основы проектирования оборудования пищевых и перерабатывающих предприятий; гидромеханические процессы в пищевой промышленности; технология переработки продукции растениеводства; технология переработки продукции животноводства. преддипломная практика; государственная итоговая аттестация.

2. Перечень компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Перечень оценочных средств*

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1	доклад	продукт самостоятельной работы обучающегося, представляющий собой краткое изложение в устном виде полученных результатов теоретического анализа определенной научной (учебно-исследовательской) темы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы, приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее	темы докладов:
2	контрольная работа	средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по разделу или нескольким разделам	комплект контрольных заданий по вариантам
3	Типовой расчет	Средство проверки умений применять полученные	Комплект заданий для выполнения типовойго расчет

		знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.	
4	тестирование	метод, который позволяет выявить уровень знаний, умений и навыков, способностей и других качеств личности, а также их соответствие определенным нормам путем анализа способов выполнения обучающимся ряда специальных заданий	банк тестовых заданий
5	собеседование (устный опрос)	Средство контроля, организованное как специальная беседа педагогического работника с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
6	Письменный опрос	Средство контроля, предполагающее выполнение письменных заданий, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	комплект заданий по вариантам

Таблица 1

Программа оценивания контролируемой дисциплины

№ п/п	Контролируемые разделы (темы дисциплины)	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4
1.	Элементы линейной алгебры.	ОПК-1	типовой расчет №1, тестирование, контрольная работа №1, устный опрос
2.	Элементы векторной алгебры	ОПК-1	типовой расчет №1, контрольная работа №1, устный опрос, тестовые задания
3.	Аналитическая геометрия на плоскости.	ОПК-1	контрольная работа №1, типовой расчет №2, устный опрос, тестовые задания, письменный опрос
4.	Аналитическая геометрия в пространстве	ОПК-1	типовой расчет №2, устный опрос, тестовые задания
5.	Дифференциальное исчисление функции.	ОПК-1	типовой расчет №3, контрольная работа №2, тестовые задания
6.	Интегральное исчисление функции одной переменной.	ОПК-1	контрольная работа №2, устный опрос, тестовые задания, доклад
7.	Обыкновенные диф-	ОПК-1	типовой расчет №4, контрольная работа №3

№ п/п	Контролируемые разделы (темы дисциплины)	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4
	ференциальные уравнения.		устный опрос, тестовые задания
8.	Теория вероятностей. Случайная величины.	ОПК-1	контрольная работа №4, типовой расчет №5. устный опрос, тестовые задания,
9.	Математическая статистика	ОПК-1	типовой расчет №6, устный опрос, тестовые задания, доклад, письменный опрос

Описание показателей и критериев оценивания компетенций по дисциплине «Математика» на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Код компетенции, этапы освоения компетенции	Планируемые результаты обучения	Показатели и критерии оценивания результатов обучения			
		ниже порогового уровня (неудовлетворительно)	пороговый уровень (удовлетворительно)	продвинутый уровень (хорошо)	высокий уровень (отлично)
1	2	3	4	5	6
ОПК-1 2 семестр	<i>знает: основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии,</i>	<i>обучающийся не знает значительной части программного материала, плохо ориентируется в материале, в понятиях и методах линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления,</i>	<i>обучающийся демонстрирует знания только основного материала, но не знает деталей, допускает неточности в формулировках, нарушает логическую последовательность в изложении программного материала</i>	<i>обучающийся демонстрирует знание материала, не допускает существенных неточности</i>	<i>обучающийся демонстрирует знание линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления, практики применения материала, исчерпывающе и последовательно, четко и логично излагает материал, хорошо ориентируется в материале, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий</i>
	<i>умеет: применять полученные теоретические</i>	<i>не умеет использовать методы и приемы для решения задач в</i>	<i>в целом успешное, но не системное умение применять</i>	<i>в целом успешное, но содержащие отдельные пробелы, умение приме-</i>	<i>сформированное умение применять изученные</i>

	знания для решения учебных задач по математике	профессиональной деятельности допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий, предусмотренных программой дисциплины, не выполнено	изученные теоретические факты для решения задач в профессиональной деятельности	знать изученные теоретические факты для решения задач в профессиональной деятельности	теоретические факты для решения задач в профессиональной деятельности
	владеет: основными методами решения математических задач с применением информационно-коммуникационных технологий	обучающийся не владеет навыками применения математических знаний и методов при решении прикладных задач, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий предусмотренных программой дисциплины не выполнено	в целом успешное, но не системное владение навыками применения математических знаний и методов линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциально-численного исчисления при решении прикладных задач	в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы или сопровождающееся отдельными ошибками владение навыками применения математических знаний и методов линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления при решении прикладных задач	успешное и системное владение навыками применения математических знаний и методов линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления при решении прикладных задач и интерпретировать получаемые результаты
ОПК-1 3 семестр	знает: , основные понятия и методы, теории дифференциальных урав-	обучающийся не знает значительной части программного материала, плохо ориентиру-	обучающийся знает основные понятия и методы, теории дифференциальных урав-	обучающийся демонстрирует знание материала, не допускает существенных неточности	обучающийся демонстрирует знание понятий и методов дифференциальных

	нений, вероятности и математической статистики.	ется в понятиях и методах теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории вероятностей и математической статистике	нений, вероятности и математической статистики, но не знает практику применения материала, допускает существенные ошибки		уравнений; теории вероятностей и математической статистике
	умеет: осуществлять математические постановки простейших задач, выбирать методы их решения и интерпретировать получаемые результаты	не умеет использовать методы и приемы теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий, предусмотренных программой дисциплины, не выполнено	в целом успешное, но не системное умение применять приемы и методы теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории кратных и криволинейных интегралов; теории числовых и функциональных рядов для решения учебных задач	в целом успешное, но отдельные пробелы, умение применять приемы и методы теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории кратных и криволинейных интегралов; теории числовых и функциональных рядов для решения учебных задач	сформированное умение применять понятия и методы теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории кратных и криволинейных интегралов; теории числовых и функциональных рядов для решения учебных задач
	владеет: основными методами решения математических задач с применением информационно-коммуникационных технологий	обучающийся не владеет навыками применения математических знаний и методов теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории вероятностей и математической статистике при решении прикладных задач с применением информационно-коммуникацион-	в целом успешное, но не системное владение навыками применения математических знаний и методов теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; интегралов; теории вероятностей и математической статистике при ре-	в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы или сопровождающееся отдельными ошибками владение навыками применения математических знаний и методов теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории вероятностей и математической статистике при решении приклад-	успешное и системное владение навыками применения математических знаний и методов теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории вероятностей и математической статистике при решении при-

		ных технологий.	шении при- кладных задач,	нением информа- ционно- коммуникационных тех-нологий.	кладных задач и интерпре- тации получа- емых резуль- татов с при- менением ин- формационно- коммуникаци- онных техно- логий.
--	--	-----------------	------------------------------	--	---

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

3.1. Входной контроль

На первом занятии по учебной дисциплине «Математика» предусмотрен входной контроль, который проходит в форме тестирования.

Цель проведения входного контроля:

- настроить обучаемого на данную предметную область;
- проверка исходного уровня знаний;
- определить готов или не готов данный обучаемый к работе по курсу;
- диагностировать по результатам выполнения входного контроля пробелы в знаниях обучаемых.

Содержание тестов сгруппировано вокруг основных разделов школьного курса математики: "Числа и вычисления", "Выражения и их преобразования", "Уравнения и неравенства", "Функция", "Геометрические фигуры. Измерение геометрических величин". Результаты входного контроля используются при проведении промежуточной аттестации.

Тест № 1

Часть I

- 1) Найдите значение выражения $\sqrt{2x+1}$ при $x = -\frac{4}{9}$.
 А. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ В. $\frac{1}{3}$ Б. 1 Г. при $x = -\frac{4}{9}$ выражение не имеет смысла
- 2) Из формулы мощности $N = \frac{A}{t}$ выразите работу А
 А. $A = \frac{Nt}{A}$ Б. $A = \frac{N}{t}$ В. $A = \frac{t}{N}$ Г. $A = Nt$
- 3) Сравните a^2 и a^3 , если известно, что $0 < a < 1$
 А. $a^2 < a^3$ Б. $a^2 > a^3$ В. $a^2 = a^3$ Г. Для сравнения не хватает данных.
- 4) Для биологической лаборатории купили оптический микроскоп, который дает возможность различить объекты размером до $2,5 \cdot 10^{-5}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.
 А. 0,0000025 мм. Б. 0,000025 мм. В. 0,00025 мм. Г. 0,0025 мм
- 5) В двух библиотеках было одинаковое количество книг. Через год в первой библиотеке число книг увеличилось на 50%, а во второй - в 2 раза. В какой библиотеке книг стало больше?
 А. В первой библиотеке

- Б. Во второй библиотеке
 В. Книг осталось поровну
 Г. Для ответа не хватает данных
- 6) Упростите выражение $(a - 4)^2 - 2a(3a - 4)$.

- А. $-5a^2 + 16$
 Б. $-5a^2 + 8a - 16$
 В. $-5a^2 + 8$
 Г. $-5a^2 + 8a - 4$

- 7) Какое из данных выражений не равно $\sqrt{\frac{5}{48}}$?

- А. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{3}}$ Б. $\frac{\sqrt{15}}{12}$ В. $\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$ Г. $\frac{\sqrt{5}}{8}$

- 8) Сократить дробь $\frac{a^2 + 3a}{9 - a^2}$.

Ответ: _____

- 9) Решите уравнение $3x^2 + x = 0$

Ответ: _____

- 10) Вычислите координаты точки пересечения прямых $2x + 3y = -12$ и $4x - 6y = 0$.

Ответ: _____

- 11) Велосипедист от озера до деревни ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 10 км/ч. Сколько времени ушло у него на дорогу от озера до деревни, если на весь путь туда и обратно велосипедист затратил 1 ч?

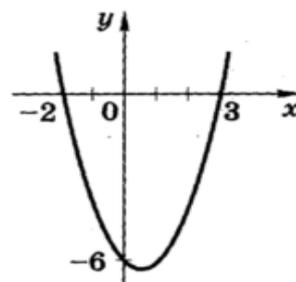
Пусть x ч – время, затраченное на дорогу от озера до деревни. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

- А. $15x = 10(1 - x)$
 Б. $\frac{15}{x} + \frac{10}{1 - x} = 1$
 В. $15x + 10(1 - x) = 1$
 Г. $15(1 - x) = 10x$

- 12) При каких значениях x значения выражения $8x - 2$ больше значений выражения $10x + 1$?

- А. При $x > -1.5$
 Б. При $x < -1.5$
 В. При $x < 0.5$
 Г. При $x > 0.5$

- 13) На рисунке изображен график функции $y = x^2 - x - 6$



Используя график, решите неравенство

$$x^2 - x - 6 > 0$$

Ответ: _____

- 14) В геометрической прогрессии $b_1 = 64$, $q = -\frac{1}{2}$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

- А. $b_2 < b_3$
 Б. $b_3 > b_4$
 В. $b_4 > b_6$

Г. $b_5 > b_7$

15) В прямоугольном треугольнике ABC угол C=90°, AC=4 см, BC=7см. Найдите расстояние от точки B до прямой AC.

- А. 4 см Б. 7 см В. $\sqrt{65}$ см Г. $\sqrt{33}$ см

16) Найдите радиус окружности, если ее длина равна 88π м.

- А. 44π м Б. 22м В. 22π м Г. 44м

Часть II

17) Упростите выражение:

$$\left(a - \frac{4a-9}{a-2}\right) : \left(2a - \frac{2a}{a-2}\right)$$

18) Из города А в город В, расстояние между которыми равно 300км, выехал автобус. Через 20 мин навстречу ему из В в А выехал автомобиль и через 2 ч после выезда встретил автобус. С какой скоростью ехал автомобиль, если известно, что она была на 20 км/ч больше скорости автобуса?

3.2. Доклады

Цель выполнения доклада:

- оценить степень готовности обучающегося к самостоятельному выбору актуальных проблем дисциплины.

- овладение навыками систематизации материала, развитие умение конкретизировать и обобщать проблемы на основе анализа массива научной литературы по выбранной теме.

Доклад оценивается по 6-балльной системе в рамках творческого рейтинга.

Рекомендуемая тематика докладов по дисциплине приведена в таблице.

Таблица

Темы докладов, рекомендуемые к написанию при изучении дисциплины
«Математика»

№ п/п	Темы докладов
1	2
1	«Численные методы решения экстремальных задач»
2	Понятие о численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений
3	«Метод наименьших квадратов».
4	«Математика - язык ах познания мира»
5	Применение кривых второго порядка в компьютерных систем
6	Суммирование расходящихся рядов
7	Конструктивизм и интуиционизм в математике
8	Логическое обоснование математики
9	Метод математической индукции
10	Гиперкомплексные числа
11	Бинарная система счисления.
12	Симметрии в живой природе
13	Алгебраические кривые
14	Многомерные пространства.
15	Площади и логарифмы
16	Возрастающие последовательности

№ п/п	Темы докладов
1	2
17	Динамические системы и аттракторы
18	Хаос и его математическое описание.
19	Фракталы в экономике
20	Экономические модели

3.3 Контрольные работы

Цель контрольной работы: углубить, систематизировать и закрепить теоретические знания обучающихся; проверить степень усвоения одной или нескольких тем или вопросов.

- Тематика контрольных работ устанавливается в соответствии с изученной темой.

- количество вариантов заданий – по теме используется 10 вариантов заданий.

Контрольная работа №1 «Элементы линейной алгебры» Вариант 1

Задание 1 Исследовать на совместность систему линейных уравнений и решить тремя способами:

- а) по формулам Крамера;
- б) матричным методом;

$$\begin{cases} 5X + 8Y - Z = 7 \\ X + 2Y + 3Z = 1 \\ 2X - 3Y + 2Z = 9 \end{cases}$$

Задание 2 Применяя метод исключения неизвестных (метод Гаусса), решить систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Контрольная работа №2 «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» Вариант 1

Задание 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \frac{x - y}{x^2 + y^2 - 1}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1. $z = \ln xy$; 2.2. $z = x^2 y^2$; 2.3. $z = x \cos y$.

Задание 3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:
 $z = \arctg xy$.

Задание 4. Найти производную функции $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ в точке $M_0(1; 4)$ по направлению вектора $\vec{l}(1; -1)$.

Задание 5. Найти градиент функции $z = x^3 - 2y^2 + xy$ в точке $M_0(1; -1)$.

Задание 6. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$ на экстремумы.

Контрольная работа №3
Вариант 1
«Интегральное исчисление функции»

Задание 1. Вычислить неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{(\sqrt{x+2})^2}{4\sqrt{x}} dx$. 2. $\int \frac{3x+1}{3x-2} dx$. 3. $\int (4-3x)e^{-3x} dx$.

4. $\int (x^2 + 5x + 6)\cos 2x dx$. 5. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$. 6. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} dx$.

7. $\int \frac{6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^2} dx$. 8. $\int \frac{4x^2 + 4x + 2}{(x+1)(x^2 + x + 1)} dx$.

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - 0,5x^2$, $x + y = 2$, вокруг оси Oy .

Задание 5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

Контрольная работа № 4
«Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Вариант 1

Задание 1. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию. $y' = 3\sqrt[3]{(y+1)^2}$ $y(2) = 0$;

Задание 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' - y = xtg \frac{y}{x}$;

Задание 3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$ $y(0) = 0$;

Задание 4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$\frac{1}{y'} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x};$$

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$xy'' = y';$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$;

Задание 7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения.

а) $y'' - 6y' + 13y = 0$ $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$;

б) Найти общее решение дифференциального уравнения. $y'' - 5y' + 6y = 0$;

в) Найти общее решение дифференциального уравнения. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Задание 8. . Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, с заданными неоднородными частями $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$y'' - 6y' + 13y = f_i(x) \quad f_i(x) = \begin{cases} f_1 = e^{2x}; \\ f_2 = \cos 3x; \\ f_3 = 2x^2 + 1; \\ f_4 = 2f_1 - f_2 - f_3; \end{cases}$$

3.4 Типовой расчет

Цель типового расчета: углубить, систематизировать и закрепить теоретические знания обучающихся; проверить степень усвоения одной или нескольких тем или вопросов Тематика типового расчета определена в соответствии с изученной темой. (таблица 3).

Количество вариантов заданий – по теме используется 15 вариантов заданий (приведен один из вариантов).

Типовой расчет №1.

«Элементы векторной алгебры и Аналитической геометрии на плоскости и в пространстве»

Образец решения типового расчёта

Вариант 0

1.

Задача 1

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(2;-3)$, $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Не находя координаты вершины D , найти:

- 1) уравнение стороны AD ;
- 2) уравнение высоты BK , опущенной из вершины B на сторону AD ;
- 3) длину высоты BK ;
- 4) уравнение диагонали BD ;
- 5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Решение.

Сначала построим чертеж. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $A(2;-3)$, $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Построим отрезки AB и BC .

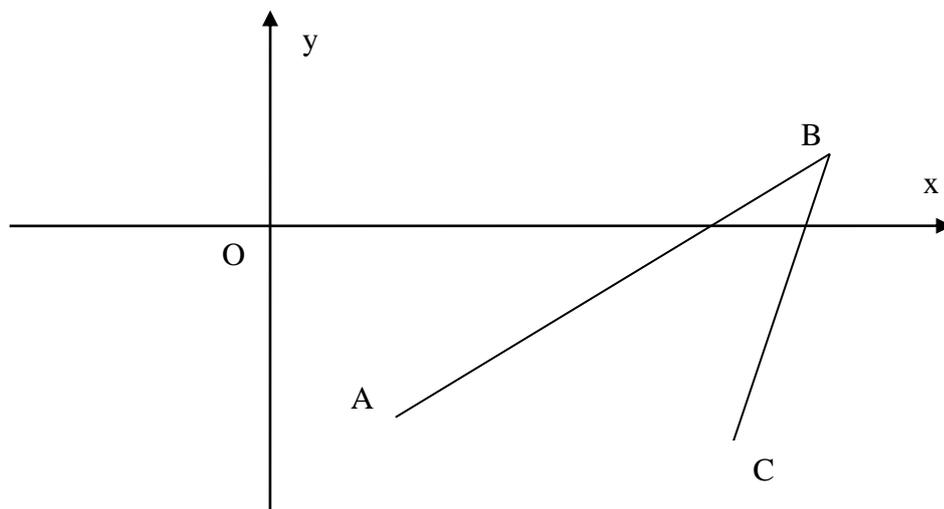


Рис. 1

Достроим полученный рисунок до параллелограмма и нанесем на чертеж высоту ВК.

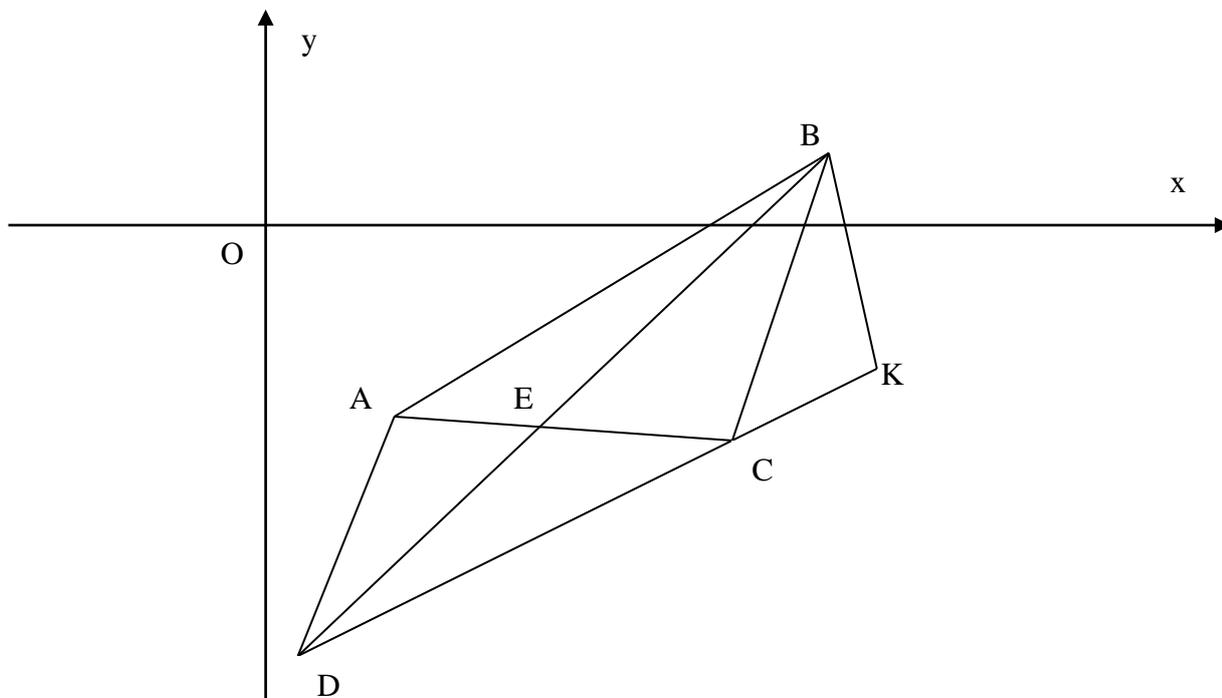


Рис. 2

1) Составим уравнение прямой AD.

а) Предварительно найдем уравнение прямой BC. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3.1)$$

По условию $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Подставим координаты точек B и C в уравнение (3.1):

$$\frac{x - 5}{3 - 5} = \frac{y - 1}{-4 - 1}, \text{ т.е. } \frac{x - 5}{-2} = \frac{y - 1}{-5}.$$

Запишем полученное уравнение в общем виде, то есть в виде $Ax + By + C = 0$. Для этого в последнем уравнении избавимся от знаменателей $-5(x-5) = -2(y-1)$ и проведем преобразования, перенося все слагаемые в левую часть равенства: $-5x + 2y + 23 = 0$ или $5x - 2y - 23 = 0$.

Из этого уравнения выразим y : $-2y = -5x + 23$; $y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2}$. Получили уравнение вида

$y = kx + b$ - уравнение с угловым коэффициентом.

б) Воспользуемся тем фактом, что противоположные стороны параллелограмма параллельны. Составим искомое уравнение прямой AD как уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC .

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ в данном направлении, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3.2)$$

где направление определяется угловым коэффициентом k .

Условие параллельности двух прямых $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ имеет вид

$$k = k_1 \quad (3.3)$$

По условию задачи $A(2; -3)$, прямая BC : $y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2}$. Подставим координаты точки A в уравнение (3.2): $y + 3 = k(x - 2)$. Так как прямая AD параллельна прямой BC , то в силу формулы (3.3) их угловые коэффициенты совпадают. Угловым коэффициентом прямой BC равен $\frac{5}{2}$,

следовательно, уравнение прямой AD имеет вид $y + 3 = \frac{5}{2}(x - 2)$.

Запишем уравнение прямой AD в общем виде. Для этого раскроем скобки и все слагаемые перенесем в левую часть равенства: $-\frac{5}{2}x + y + 8 = 0$. Умножим обе части равенства на (-2) и получим общее уравнение прямой AD : $5x - 2y - 16 = 0$.

Запишем уравнение прямой AD в виде с угловым коэффициентом. Для этого выразим y из общего уравнения: $y = \frac{5}{2}x - 8$.

2) Составим уравнение высоты BK , проведенной из вершины B на сторону AD как уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AD .

Условие перпендикулярности двух прямых $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ имеет вид

$$k = -\frac{1}{k_1} \quad (3.4)$$

Подставим координаты точки B в уравнение (3.2): $y - 1 = k(x - 5)$. Так как высота BK перпендикулярна прямой AD , то их угловые коэффициенты связаны соотношением (3.4). Угловым коэффициентом прямой AD равен $\frac{5}{2}$, следовательно, угловым коэффициентом высоты BK равен $-\frac{2}{5}$

и уравнение прямой BK имеет вид $y - 1 = -\frac{2}{5}(x - 5)$. Запишем уравнение высоты BK в общем виде: $2x + 5y - 15 = 0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом:

$$y = -\frac{2}{5}x + 3.$$

3) Найдем длину высоты BK как расстояние от точки B до прямой AD .

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую и определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.5)$$

Так как BK перпендикулярна AD , то длина BK может быть найдена с помощью формулы (3.5). По условию $B(5;1)$, прямая AD определяется уравнением $5x - 2y - 16 = 0$. В силу формулы (3.5) длина высоты BK равна $d = \frac{|5 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 16|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{29}}$.

4) Найдем уравнение диагонали BD как уравнение прямой, проходящей через точки B и E , где E - середина отрезка AC .

а) Если $A(x_1; y_1)$ и $C(x_2; y_2)$, то координаты точки $E(x_0; y_0)$ - середины отрезка AC , определяются формулами

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (3.6)$$

По условию $A(2; -3)$, $C(3; -4)$. В силу формул (3.6) имеем: $x_0 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, $y_0 = \frac{-3-4}{2} = -\frac{7}{2}$.

Следовательно $E(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2})$.

б) Так как точка пересечения диагоналей является их серединой, то точка E (середина отрезка AC) является точкой пересечения диагоналей и диагональ BD проходит через точку E .

Вспользуемся уравнением (3.1). По условию $B(5;1)$, $E(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2})$. В силу формулы (3.1) уравнение прямой BE (диагонали BD) имеет вид:

$$\frac{x-5}{\frac{5}{2}-5} = \frac{y-1}{-\frac{7}{2}-1} \quad \text{или} \quad \frac{x-5}{-\frac{5}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{9}{2}}$$

уравнение в общем виде: $9x - 5y - 40 = 0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y = \frac{9}{5}x - 8$.

5) Найдем тангенс угла между диагоналями BD и AC .

а) Найдем уравнение диагонали AC как уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Вспользуемся уравнением (3.1). По условию $A(2; -3)$, $C(3; -4)$. Следовательно, $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{-4+3}$.

Общее уравнение диагонали AC имеет вид $x + y + 1 = 0$, уравнение с угловым коэффициентом - вид $y = -x - 1$, угловой коэффициент k_1 прямой AC равен -1 .

б) Уравнение диагонали BD имеет вид $y = \frac{9}{5}x - 8$, ее угловой коэффициент $k_2 = \frac{9}{5}$.

в) Тангенс угла φ между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$$\text{Следовательно, } \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{9}{5} - (-1)}{1 + \frac{9}{5} \cdot (-1)} \right| = \left| \frac{\frac{14}{5}}{-\frac{4}{5}} \right| = \frac{7}{2}. \quad \text{Отсюда } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{7}{2}.$$

Задача №2.

2. Условие задачи №2 несколько различается в зависимости от номера варианта контрольной работы. Приведем решения простейших задач, входящих в это задание.

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;3;2)$, $B(-2;1;0)$, $C(4;2;-3)$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

Тогда уравнение плоскости ABC в силу уравнения (3.7) имеет вид $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -2-1 & 1-3 & 0-2 \\ 4-1 & 2-3 & -3-2 \end{vmatrix} = 0$

или $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, т.е. в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Для этого раскроем определитель по первой строке $(x-1) \cdot (10-2) - (y-3) \cdot (15+6) + (z-2) \cdot (3+6) = 0$. После преобразований получим: $8x - 21y + 9z + 37 = 0$.

2) Найти нормальный вектор плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$.

Решение.

Нормальный вектор \vec{N} - это вектор, перпендикулярный плоскости. Если плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то нормальный вектор имеет координаты $\{A, B, C\}$.

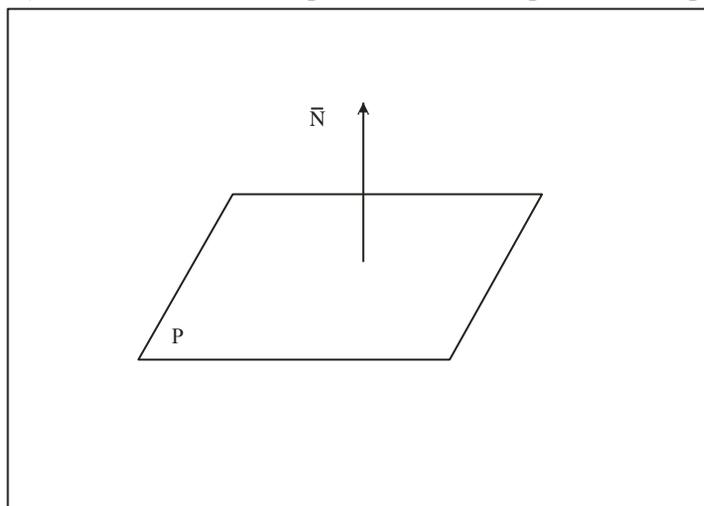


Рис. 3

Для плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$ нормальным является вектор $\vec{N} = \{2; 3; -1\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\vec{N} = \{2; 3; -1\}$ так же является нормальным вектором плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda; 3\lambda; -\lambda\}$ будет являться нормальным вектором рассматриваемой плоскости.

3) Найти косинус угла между плоскостями $2x - 3y + z - 4 = 0$ и $x + 5y + 4z = 0$.

Решение.

Угол φ между двумя плоскостями $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ представляет собой угол между их нормальными векторами и определяется равенством

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Для плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$ координаты нормального вектора $\bar{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ определяются равенствами $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $C_1 = 1$. Для плоскости $x + 5y + 4z = 0$ - равенствами $A_2 = 1$, $B_2 = 5$, $C_2 = 4$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + 4^2}} = \frac{2 - 15 + 4}{\sqrt{4 + 9 + 1} \cdot \sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{-9}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{42}} = -\frac{9}{\sqrt{588}} = -\frac{9}{14\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

4) Составить уравнение плоскости P , проходящей через точку $M_0(1; -2; 5)$ параллельно плоскости $P_1: 2x + 3y - z + 5 = 0$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3.8)$$

Подставим в уравнение (3.8) координаты точки M_0 : $A(x - 1) + B(y + 2) + C(z - 5) = 0$.

Условие параллельности плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (3.9)$$

Так как плоскости P и P_1 параллельны, то в качестве нормального вектора \bar{N} плоскости P можно взять нормальный вектор $\bar{N}_1 = \{2; 3; -1\}$ плоскости P_1 , т.е. в формуле (3.9) отношение

$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{-1}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P_1 примет вид $2(x - 1) + 3(y + 2) - (z - 5) = 0$. Запишем это уравнение в общем виде: $2x + 3y - z + 9 = 0$.

5) Найти расстояние от точки $M_0(1, 3, -2)$ до плоскости $P: 3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

Решение.

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, и определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (3.10)$$

Для плоскости $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ координаты нормального вектора $\bar{N} = \{A; B; C\}$ определяются равенствами $A = 3$, $B = -2$, $C = 4$. Следовательно,

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|-16|}{\sqrt{9 + 4 + 16}} = \frac{16}{\sqrt{29}}.$$

6) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1; -2; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$.

Решение.

Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (3.11)$$

Так как $M_1(1; -2; 3)$, $M_2(3; 1; 2)$, то в силу (3.11) получим уравнения $\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y + 2}{1 + 2} = \frac{z - 3}{2 - 3}$ или

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 3}{-1}.$$

7) Найти направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$.

Решение.

Направляющий вектор \vec{s} - это вектор, параллельный прямой.

Если прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$, то направляющий вектор \vec{s} имеет координаты $\{p; q; r\}$.



1

Рис. 4

Для рассматриваемой прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$ направляющим вектором является вектор $\vec{s} = \{2; 3; -2\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\vec{s} = \{2; 3; -2\}$ так же является направляющим вектором прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda; 3\lambda; -2\lambda\}$ будет являться направляющим вектором рассматриваемой прямой.

8) Найти косинус угла между прямыми $\frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}$ и $\frac{x+5}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-6}{1}$.

Решение.

Угол φ между двумя прямыми $l_1: \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ и $l_2: \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ представляет собой угол между их направляющими векторами и определяется равенством

$$\cos \varphi = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

Для прямой $\frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}$ координаты направляющего вектора $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1; r_1\}$ определяются равенствами $p_1 = 2, q_1 = -2, r_1 = 3$.

Для прямой $\frac{x+5}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-6}{1}$ - равенствами $p_2 = 3, q_2 = -4,$

$r_2 = 1$. Значит,

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{6 + 8 + 3}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{26}} = \frac{17}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$$

9) Составить канонические уравнения прямой l , проходящей через точку $M_0(3; 2; -1)$ параллельно прямой $l_1: \frac{x-5}{4} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{3}$

Решение.

Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$. Здесь $(x_0; y_0; z_0)$ - координаты точки, через которую проходит прямая.

Здесь $(x_0; y_0; z_0)$ - координаты точки, через которую проходит прямая.

В канонические уравнения прямой l подставим координаты точки M_0 . Получим:

$$\frac{x-3}{p} = \frac{y-2}{q} = \frac{z+1}{r}.$$

Условие параллельности прямых $\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ и $\frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ имеет вид

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (3.12)$$

Так как прямые l и l_1 параллельны, то в качестве направляющего вектора \vec{s} прямой l можно взять направляющий вектор $\vec{s}_1 = \{4; -2; 3\}$ прямой l_1 , т.е. в формуле (3.12) отношение

$\frac{p}{4} = \frac{q}{-2} = \frac{r}{3}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}.$$

10) Найти угол между прямой $l: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}$ и плоскостью $P: 2x - y + 3z - 4 = 0$.

Решение.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Угол φ между прямой и плоскостью равен $\frac{\pi}{2} - \psi$, где ψ - угол между направляющим вектором \vec{s} прямой и нормальным вектором \vec{N} плоскости.

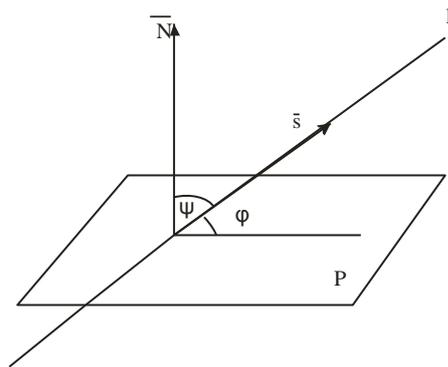


Рис. 5

Угол φ между прямой $l: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ и плоскостью $P: Ax + By + Cz + D = 0$ определяется формулой

$$\sin \varphi = \frac{Ap + Bq + Cr}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

Для плоскости $P: 2x - y + 3z - 4 = 0$ координаты нормального вектора $\vec{N} = \{A; B; C\}$ определяются равенствами $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$. Для прямой $l: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}$ координаты направляющего вектора $\vec{s} = \{p; q; r\}$ - равенствами $p = 5$, $q = 3$, $r = -1$. Синус угла между прямой и плоскостью равен

$\sin \varphi = \frac{2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = \frac{4}{\sqrt{490}}$. Следова-

тельно, $\varphi = \arcsin \frac{4}{\sqrt{490}}$.

11) Составить уравнение плоскости P , проходящей через точку $M_0(1, -2, -3)$ перпендикулярно прямой $l: \frac{x-3}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-0}{-2}$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, имеет вид $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

Подставим в указанное уравнение координаты точки M_0 . Получим: $A(x-1) + B(y+2) + C(z+3) = 0$.

Условие перпендикулярности плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ имеет вид

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r} \quad (3.13)$$

Так как искомая плоскость P перпендикулярна прямой l , то в качестве нормального вектора \bar{N} плоскости можно взять направляющий вектор $\bar{s} = \{4, 1, -2\}$ прямой l , т.е. в формуле (3.13)

отношение $\frac{A}{4} = \frac{B}{1} = \frac{C}{-2}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P примет вид $4 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y+2) + (-2) \cdot (z+3) = 0$. Запишем это уравнение в общем виде: $4x + y - 2z - 8 = 0$.

12) Составить канонические уравнения прямой l , проходящей через точку $M_0(5; -3; 2)$ перпендикулярно плоскости $P: x + 4y - z = 0$.

Решение.

Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку, имеют вид $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$.

Подставим в эти уравнения координаты точки M_0 . Получим: $\frac{x-5}{p} = \frac{y+3}{q} = \frac{z-2}{r}$

Условие перпендикулярности прямой $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

имеет вид $\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}$.

Так как прямая l перпендикулярна плоскости P , то в качестве направляющего вектора \bar{s} прямой l можно взять нормальный вектор $\bar{N} = \{1; 4; -1\}$ плоскости P , т.е. в формуле (3.13) отношение

$\frac{1}{p} = \frac{4}{q} = \frac{-1}{r}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет

вид: $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{-1}$.

13) Найти координаты точки пересечения прямой $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ и плоскости $P:$

$x + 2y - z + 5 = 0$.

Решение.

Координаты точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ пересечения прямой $\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}$ и плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$ представляют собой решение системы

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases} \quad (3.14)$$

Запишем параметрические уравнения прямой l : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ и подставим выражения для x, y, z в

уравнение плоскости P : $(1 + 2t) + 2 \cdot 3t - (-1 + t) + 5 = 0$. Отсюда $7t + 7 = 0$; $t = -1$. Подставим

найденное значение t в параметрические уравнения прямой l : $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$. Следовательно,

$M_0(-1; -3; -2)$.

Задача №3.

К кривым второго порядка относятся эллипс (рис.6), гипербола (рис. 7 и 8), парабола (рис. 9-12). Приведем рисунки и канонические уравнения этих кривых.

Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

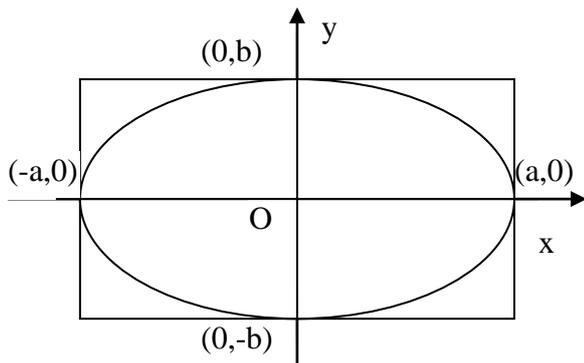


Рис. 6

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

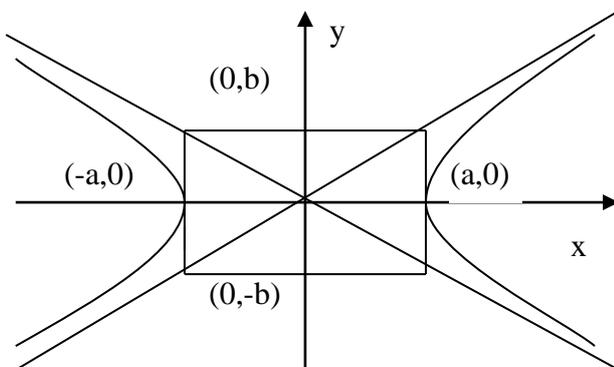


Рис. 7

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

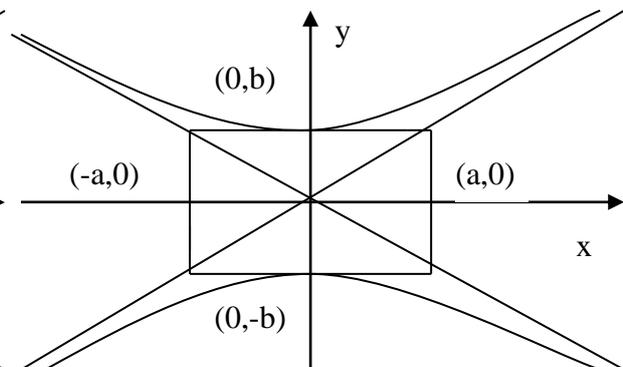


Рис. 8

Парабола $y^2 = 2px$

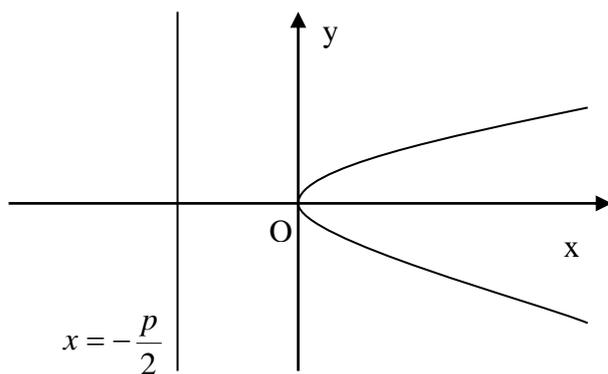


Рис. 9

Парабола $y^2 = 2px$

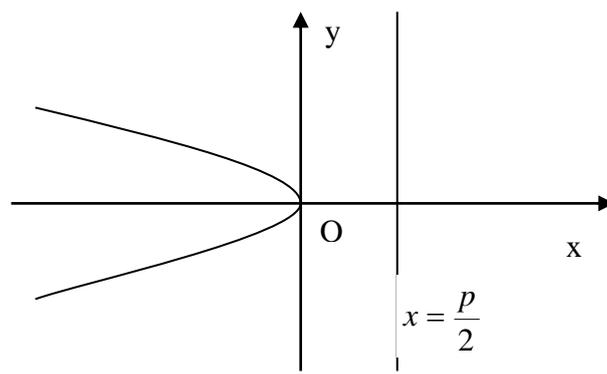


Рис. 10

Парабола $x^2 = 2py$

Парабола $x^2 = -2py$

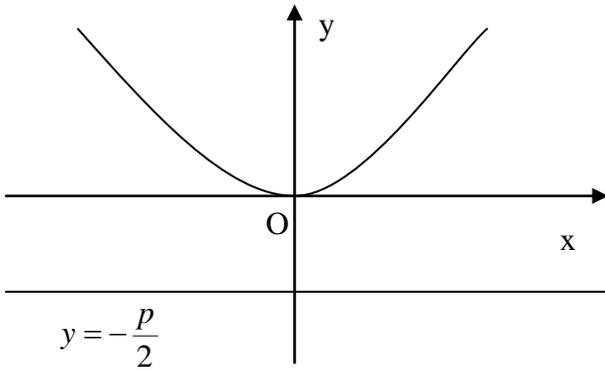
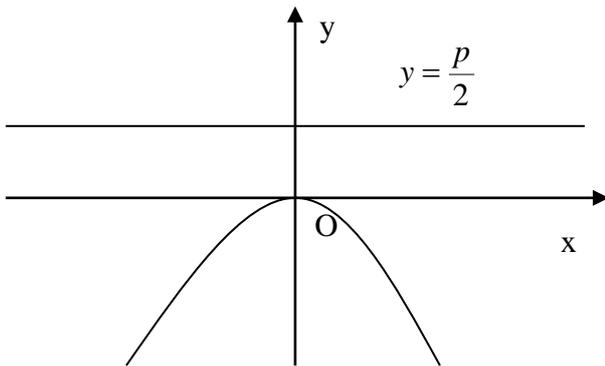


Рис. 11



Приведем примеры решения задачи №3.

Пример 1. Привести уравнение кривой второго порядка $4x^2 + y^2 + 16x - 2y - 8 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Решение.

Для приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду применяют метод выделения полного квадрата.

Сгруппируем слагаемые, содержащие текущие координаты. Коэффициенты при x^2 и y^2 вынесем за скобки: $4(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) - 8 = 0$.

Выделим полный квадрат: $4(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) - 8 - 16 - 1 = 0$. Отсюда

$4(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$. Разделим обе части равенства на 25: $\frac{4(x + 2)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{25} = 1$. Запишем

полученное уравнение в каноническом виде: $\frac{(x + 2)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y - 1)^2}{25} = 1$.

Выполним параллельный перенос осей координат по формулам $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$. При таком преоб-

разовании начало координат переносится в точку (x_0, y_0) , уравнение эллипса принимает канонический вид

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

В нашем примере $x_0 = -2$, $y_0 = 1$, $a = \frac{5}{2}$, $b = 5$.

Итак, рассматриваемое уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(-2;1)$ и полуосями $\frac{5}{2}$ и 5.

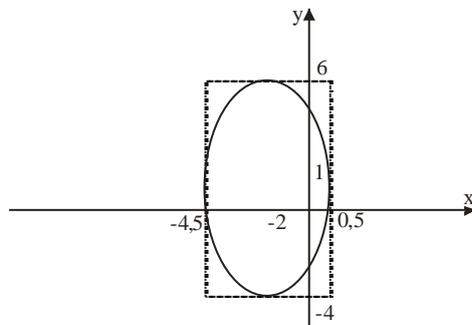


Рис. 13

Задача №4.

Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = 1 + \cos \varphi$.

Требуется:

- 1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$;
- 2) построить полученные точки;
- 3) построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);
- 4) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Решение.

Сначала построим таблицу значений φ и ρ :

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$
ρ	2,0	1,9	1,7	1,3	1,0	0,6	0,2	0,0	0,0	0,0	0,2	0,6	1,0	1,38	1,7	1,92
	0	2	1	8	0	2	9	8	0	8	9	2	0		1	

Построим эти точки в полярной системе координат. Полярная система координат состоит из начала координат O (полюса) и полярной оси OP . Координаты точки M в полярной системе координат определяются расстоянием ρ от полюса (полярным радиусом) и углом φ между направлением полярной оси и полярным радиусом (полярным углом). Для того, чтобы построить точку M , необходимо построить луч, выходящий из точки O под углом φ к полярной оси; отложить на этом луче отрезок длиной ρ .

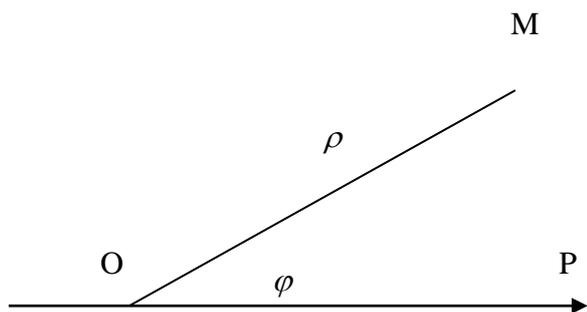


Рис. 14

Построим все точки, определенные в таблице и соединим их плавной линией

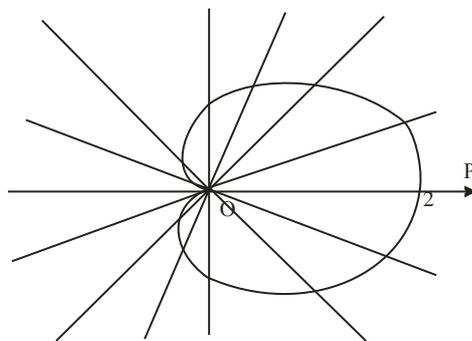


Рис. 15

Запишем уравнение рассматриваемой кривой в прямоугольной декартовой системе координат. Для этого воспользуемся формулами перехода от декартовой к полярной системе координат. Если полюс совпадает с началом координат прямоугольной декартовой системы координат, полярная ось – с осью абсцисс, то между прямоугольными декартовыми координатами $(x; y)$ и полярными координатами $(\rho; \varphi)$ существует следующая связь:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Откуда

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

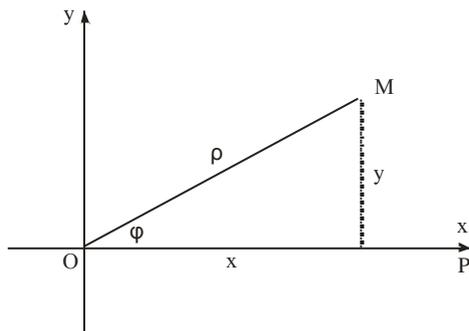


Рис. 16

Итак, в уравнении исходной кривой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Поэтому уравнение

$\rho = 1 + \cos \varphi$ принимает вид $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. После преобразований получим уравне-

ние $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$.

Задача №5.

Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

$$1) \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ y^2 \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$2) \quad -\sqrt{36 - (x+3)^2} \leq y - 3 \leq 0$$

Решение.

Для того, чтобы решить неравенство $F(x, y) \geq 0$ на плоскости, надо построить график линии $F(x, y) = 0$. Кривая $F(x, y) = 0$ разбивает плоскость на части, в каждой из которых выражение $F(x, y)$ сохраняет свой знак. Выбирая пробную точку в каждой из этих частей, найдем часть плоскости, являющуюся искомым решением неравенства.

1) Построим прямые $x = 1$ и $x = 2$, заштрихуем область, в которой $1 \leq x \leq 2$. Затем построим параболу $y^2 = 2x$ и заштрихуем область, содержащую ось симметрии параболы (расположенную внутри параболы); построим прямую $y = 0$ и заштрихуем область, лежащую выше прямой. Пересечение всех заштрихованных областей и определит множество точек, представляющих решение рассматриваемой системы.

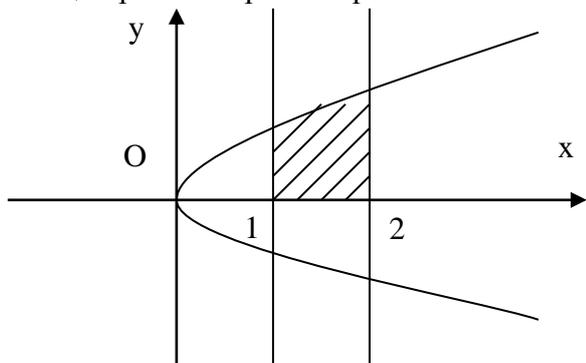


Рис. 17

2) Построим линию, определяемую уравнением $y - 3 = -\sqrt{36 - (x + 3)^2}$. Эта линия представляет собой ту часть окружности $(y - 3)^2 = 36 - (x + 3)^2$ или $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 36$, на которой $y - 3 \leq 0$. Далее построим прямую $y - 3 = 0$ ($y = 3$). Решением рассматриваемого двойного неравенства является часть плоскости, расположенная между нижней половиной окружности $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 36$ с центром в точке $(-3, 3)$ радиуса 6 прямой $y = 3$.

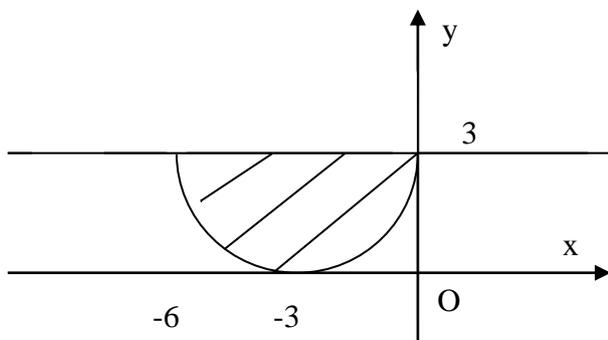


Рис. 18

3.5 Тестовые задания

По дисциплине «Математика» предусмотрено проведение письменного тестирования.

Цель тестирования: выявить уровень знаний обучающихся, оценить степень усвоения ими учебного курса, а также стимулировать активность их познавательной деятельности.

Письменное тестирование проводится после изучения определенного раздела дисциплины.

- результаты тестирования учитываются при проведении промежуточной аттестации.

Банк тестовых заданий содержит 5 вариантов по 12 заданий.

Пример тестового задания

Тест №1

«Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия».

1. При каком значении x $\begin{vmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = 30$	1) $x=0$ 2) $x=-1$ 3) $x=4$ 4) $x=-2$
2. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = ?$	1) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$. 3) $(2 \ 0 \ 6)$. 4) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
3. Вычислить ранг матрицы A , если: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	1) 1. 2) 3. 3) 0. 4) 2.
4. Вычислить $B=A^{-1}C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ 24 & -17 \end{pmatrix}$	1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 17 & 21 \end{pmatrix}$.
5. Решить систему и в ответе указать сумму решений: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$	1)1;2)3;3)-3;4)5;5)-1
6. При каком значении λ система совместна: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 = \lambda \end{cases}$	1) $\lambda=0$; 2) $\lambda=12$; 3) $\lambda=16$; 4) при любом
7. Вычислить периметр треугольника ABC , если: $A(7;-3)$ $B(12;9)$ $C(6;1)$	1) $3+\sqrt{6}$; 2) $23+\sqrt{17}$; 3) 24; 4) $17-\sqrt{8}$.
8. Указать прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $(2; -\frac{\pi}{3})$	1) $(1; -\sqrt{3})$; 2) $(0; \frac{\pi}{3})$; 3) $(4;2)$; 4) $(1; -\frac{\sqrt{3}}{2})$.
9. Указать уравнение прямой проходящей через точку $M(1;2)$ и имеющий угловой коэффициент $k=1$	1) $y=x-4$; 2) $y=x+1$; 3) $y=4x-2$; 4) $y=x-2$.
10. Указать расположение прямых $3x+5y-9=0$ и $10x-6y+4=0$	1) перпендикулярны; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) совпадают.
11. Написать каноническое уравнение эллипса, если: $2c=8$, $b=3$	1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{3} = 1$.
12. Указать уравнение прямой проходящей через точки: $A(1;-2;-1)$ и $B(3;0;4)$	1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-6}{-1}$; 2) $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{4}$; 3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{5}$; 4) $\frac{x-1}{6} = \frac{z}{7}$.

3.6 Рубежный контроль

- Цель проведения рубежного контроля – проверка уровня усвоения раздела или тем курса по дисциплине «Математика».

- *критерии оценки рубежного контроля:*

Оценка «5» - отлично – заслуживает обучающийся, обнаруживший всестороннее, систематическое и глубокое знание вопроса, умение приводить примеры, поясняющие излагаемый материал.

Оценка «4» - хорошо - заслуживает обучающийся, обнаруживший достаточные, но не глубокие знания вопроса. Поясняющие примеры приводятся редко.

Оценка «3» - удовлетворительно – заслуживает обучающий, обнаруживший знания по основным моментам вопроса, но не раскрыв его сути.

Оценка «2» - неудовлетворительно – выставляется обучающемуся, обнаружившему пробелы в знаниях и допустившему принципиальные ошибки в изложении ответа на вопрос.

- Вопросы рубежного контроля, рассматриваемые на контактных занятиях и выносимые на самостоятельное изучение.

Результаты рубежного контроля учитываются при проведении промежуточной аттестации.

Вопросы рубежного контроля №1

Вопросы, рассматриваемые на контактных занятиях.

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения.
3. Методы вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
4. Матрицы. Квадратная, прямоугольная, единичная матрицы. Сложение, вычитание, умножение матрицы на число.
5. Произведение матриц. Условие, при котором возможно умножение матриц.
6. Обратная матрица.
7. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера.
8. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
10. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
11. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.
12. Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Присоединенная матрица. Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной.
2. Решение систем методом обратной матрицы и методом Крамера.
3. Однородные системы линейных алгебраических уравнений и их исследование.
4. Метод координат. Декартова система координат. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.
5. Полярная система координат. Зависимость между декартовыми и полярными координатами.
6. Формулы преобразования декартовых координат.
7. Линии второго порядка. Общее уравнение линий второго порядка и его исследование.
8. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.
9. Взаимное расположение плоскостей. Условие параллельности и перпендикулярности. Угол между плоскостями.
10. Прямая линия в пространстве. Общее и каноническое уравнения прямой линии в пространстве.

11. Взаимное расположение прямых линий в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности. Угол между прямыми.

Вопросы рубежного контроля №2

Вопросы, рассматриваемые на контактных занятиях.

1. Функция, область определения и область значений. Простейшие элементарные функции. Способы задания функции.
2. Предел функции. Односторонние пределы.
3. Теоремы о пределах.
4. Замечательные пределы.
5. Эквивалентные бесконечно малые. Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых.
6. Производная функции. Её геометрический и механический смысл.
7. Основные правила и формулы дифференцирования.
8. Сложная функция и её производная.
9. Неявная функция и её производная.
10. Параметрически заданная функция и её производная.
11. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Приложение дифференциала к приближённым вычислениям.
12. Производные и дифференциалы высших порядков.
13. Условия монотонности функции. Экстремумы функции.
14. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба.
15. Асимптоты функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
16. Функции нескольких переменных. Частные производные.
17. Производная по направлению. Градиент.
18. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Понятие множества. Множество действительных и комплексных чисел.
2. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности и связи между ними.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их сравнение. Эквивалентные функции.
4. Арифметические операции над непрерывными функциями.
5. 1 и 2 теоремы Больцано-Коши. Теорема Вейерштрасса.
6. Понятие сложной функции и её непрерывность.
7. Понятие обратной функции и её непрерывность.
8. Связь между дифференцируемостью и существованием конечной производной.
9. Правило Лопиталя.
10. Общая схема исследования функции.
11. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.
12. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Формулы Эйлера.
13. Возведение комплексного числа в n -ую степень и извлечение корня n -ой степени. Формулы Муавра.
14. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.
15. Разложение алгебраических многочленов на множители. Теорема Безу.

Вопросы рубежного контроля №3

Вопросы, рассматриваемые на контактных занятиях.

1. Первообразная функция и неопределённый интеграл, его геометрический смысл.
2. Свойства неопределённого интеграла.
3. Таблица интегралов некоторых функций.
4. Метод подстановки (замены переменной) в неопределённом интеграле.

5. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
6. Интегрирование рациональных дробей.
7. Понятие определённого интеграла и его геометрический смысл.
8. Свойства определённого интеграла.
9. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
11. Приложение определённых интегралов. Вычисление площадей плоских фигур, длин дуг

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Интегрирование элементарных дробей.
2. Разложение рациональных дробей на элементарные. Метод неопределённых коэффициентов.
3. Интегрирование рациональных функций.
4. Несобственные интегралы 1-го рода.
5. Несобственные интегралы 2-го рода.
6. Простейшие приложения определённого интеграла.

2 семестр

Вопросы рубежного контроля №4

Вопросы, рассматриваемые на контактных занятиях.

1. Дифференциальные уравнения. Общие понятия: порядок уравнения, решение, общее и частное решения.
2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Теорема Коши и следствия из неё.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.
4. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Нахождение частного решения.
6. Системы дифференциальных уравнений. Метод исключения.

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.
2. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.
3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.
4. Уравнения в полных дифференциалах, методы их решения..

Вопросы рубежного контроля №5

Вопросы, рассматриваемые на контактных занятиях.

1. Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания. Примеры.
2. Случайные события и их классификация
3. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчёт вероятности.
4. Понятие суммы и произведения событий
5. Несовместимые события. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий и следствия из неё.
6. Совместные события. Теорема сложения вероятностей совместных событий
7. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий
8. Зависимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий
9. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли
10. Локальная и интегральная формулы Лапласа

11. Формула Пуассона, условия её применения
12. Понятие случайной величины, закон её распределения
13. Дискретная случайная величина. Ряд распределения, многоугольник распределения
14. Функция распределения $F(x)$ и её свойства
15. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения вероятности $f(x)$ и её свойства. Кривая распределения.
16. Числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение)
17. Свойства математического ожидания и дисперсии
18. Нормальное распределение непрерывной случайной величины, определение, вид кривой Гаусса, свойства кривой.
19. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал. Правило 3-х сигм

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Операции над событиями.
2. Классическая вероятностная схема.
3. Элементы комбинаторики и вычисление вероятности событий. Геометрическая вероятность.
4. Теорема условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей.
5. Формула полной вероятности.
6. Формула Байеса.
7. Вероятность событий в схеме Бернулли.
8. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа.
9. Функция распределения и ее свойства.
10. Ряд распределения, полигон и функция распределения дискретной случайной величины.
11. Плотность распределения и функция распределения непрерывной случайной величины.
12. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной и непрерывной случайной величины.
13. Распределения дискретных случайных величин: биномиальное, Пуассона. Их числовые характеристики.
14. Равномерное и показательное распределения, их числовые характеристики.
15. Нормальное распределение и его числовые характеристики.

Вопросы рубежного контроля №6

Вопросы, рассматриваемые на контактных занятиях.

1. Статистический и вариационный ряды. Варианты, частоты, относительные частоты
2. Статистическое распределение выборки. Полигон.
3. Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$. Её свойства
4. Группированное статистическое распределение. Построение гистограммы
5. Числовые характеристики выборки
6. Точечные оценки числовых характеристик и их свойства
7. Точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения генеральной совокупности
8. Интервальные оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал
9. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности
10. Функциональная и корреляционная зависимости между случайными величинами
11. Основные задачи теории корреляции
12. Коэффициент корреляции и его свойства
13. Линейная корреляция. Определение параметров прямой регрессии методом квадратов.

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Понятие об интервальном оценивании. Доверительная вероятность, доверительный интервал.
2. Статистическая гипотеза, статистический критерий.
3. Уровень значимости и мощность критерия.
4. Построение теоретического закона распределения по опытным данным.
5. Понятие о критериях согласия.
6. Критерий Пирсона χ^2 и схема его применения.
7. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
8. Основные задачи теории корреляции.
9. Линейная регрессия. Уравнения регрессии.
10. Коэффициент корреляции: оценка тесноты и вида связи между признаками X и Y.

3..7. Промежуточная аттестация

Контроль за освоением дисциплины «Математика» и оценка знаний обучающихся на экзамене/зачете производится в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования, утвержденном решением ученого совета ФГБОУ ВПО «Саратовский ГАУ» от 18.06.2014, протокол №7.

В соответствии с учебным планом по направлению подготовки 35.03.07 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции промежуточная аттестация в первом семестре проходит в виде зачета, во втором семестр - экзамен.

Промежуточная аттестация служит оценкой работы студента в течение всего срока обучения и призвана выявить уровень, прочность и систематичность полученных им теоретических и практических знаний, приобретения навыков самостоятельной работы, развития творческого мышления, умение синтезировать полученные знания и применять их в решении практических задач.

Экзаменационный билет помимо теоретических вопросов включает карточку с практическими заданиями по основным темам дисциплины.

Контрольные требования и задания соответствуют требуемому уровню усвоения дисциплины и отражают ее основное содержание.

Для получения зачета и экзамена студент обязан выполнить все самостоятельные работы, написать контрольные работы, пройти собеседование по выполненным типовым расчетам.

Тематика вопросов, выносимых на зачет

1-ый семестр

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения.
3. Методы вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
4. Матрицы. Квадратная, прямоугольная, единичная матрицы. Сложение, вычитание, умножение матрицы на число.
5. Произведение матриц. Условие, при котором возможно умножение матриц.
6. Обратная матрица.
7. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера.
8. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
10. Прямоугольная и полярная системы координат на плоскости. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.
11. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
12. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.

13. Кривые второго порядка
14. Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей
15. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
16. Функция, область определения и область значений. Простейшие элементарные функции. Способы задания функции.
17. Предел функции. Односторонние пределы.
18. Теоремы о пределах.
19. Замечательные пределы.
20. Эквивалентные бесконечно малые. Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых.
21. Непрерывность функции в точке и на множестве точек. Теоремы о непрерывных функциях.
22. Точки разрыва функции и их квалификация.
23. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.
24. Производная функции. Её геометрический и механический смысл.
25. Основные правила и формулы дифференцирования.
26. Сложная функция и её производная.
27. Неявная функция и её производная.
28. Параметрически заданная функция и её производная.
29. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Приложение дифференциала к приближённым вычислениям.
30. Производные и дифференциалы высших порядков.
31. Теорема Роля, Лагранжа, Коши.
32. Правило Лопиталя.
33. Формула Тейлора.
34. Условия монотонности функции. Экстремумы функции.
35. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба.
36. Асимптоты функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
37. Первообразная функция и неопределённый интеграл, его геометрический смысл.
38. Свойства неопределённого интеграла.
39. Таблица интегралов некоторых функций.
40. Метод подстановки (замены переменной) в неопределённом интеграле.
41. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
42. Интегрирование рациональных дробей.
43. Понятие определённого интеграла и его геометрический смысл.
44. Свойства определённого интеграла.
45. Формула Ньютона-Лейбница.
46. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
47. Несобственные интегралы 1-го рода.
48. Несобственные интегралы 2-го рода.

Тематика вопросов, выносимых на экзамен

2-ой семестр

1. Дифференциальные уравнения. Общие понятия: порядок уравнения, решение, общее и частное решения
2. Дифференциальные уравнения 1 го порядка. Теорема Коши и следствия из неё
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.
4. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2го порядка с постоянными коэффициентами

5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2 го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Нахождение частного решения.
6. Системы дифференциальных уравнений. Метод исключения.
7. Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания. Примеры.
8. Случайные события и их классификация
9. Относительная частота случайного события и статистическое определение вероятности
10. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчёт вероятности.
11. Понятие суммы и произведения событий
12. Несовместимые события. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий и следствия из неё.
13. Совместные события. Теорема сложения вероятностей совместных событий
14. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий
15. Зависимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий
16. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли
17. Локальная и интегральная формулы Лапласа
18. Формула Пуассона, условия её применения
19. Понятие случайной величины, закон её распределения
20. Дискретная случайная величина. Ряд распределения, многоугольник распределения
21. Функция распределения $F(x)$ и её свойства
22. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения вероятности $f(x)$ и её свойства. Кривая распределения.
23. Числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение)
24. Свойства математического ожидания и дисперсии
25. Биномиальное распределение дискретной случайной величины, его числовые характеристики
26. Равномерное распределение непрерывной случайной величины, его числовые характеристики
27. Нормальное распределение непрерывной случайной величины, определение, вид кривой Гаусса, свойства кривой.
28. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал. Правило 3-х сигм
29. Генеральная и выборочная совокупность. Выборочный метод. Повторная, бесповторная, репрезентативная выборки
30. Статистический и вариационный ряды. Варианты, частоты, относительные частоты
31. Статистическое распределение выборки. Полигон.
32. Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$. Её свойства
33. группированное статистическое распределение. Построение гистограммы
34. Числовые характеристики выборки
35. Точечные оценки числовых характеристик и их свойства
36. Точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения генеральной совокупности
37. Интервальные оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал
38. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности
39. Функциональная и корреляционная зависимости между случайными величинами
40. Основные задачи теории корреляции
41. Коэффициент корреляции и его свойства
42. Линейная корреляция. Определение параметров прямой регрессии методом квадратов.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

4.1 Процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Контроль результатов обучения студентов, этапов и уровня формирования компетенций по дисциплине «Математика» осуществляется через проведение входного, текущего, рубежных, выходного контролей и контроля самостоятельной работы

Формы текущего, промежуточного и итогового контроля, порядок начисления баллов и фонды контрольных заданий для текущего контроля разрабатываются кафедрой исходя из специфики дисциплины, и утверждаются на заседании кафедры.

Максимальное количество баллов, которое может получить обучающийся, соответствует количеству часов, отводимых на контактную работу в 1 семестре и равно – 72 баллов, во 2 семестре равно – 46. баллов

Устанавливается следующая градация перевода оценки из многобалльной в четырех-балльную.

Критерий рейтинговых оценок по дисциплине «Математика»

1 семестр

<i>Экзаменационная оценка</i>	<i>Рейтинговая оценка успеваемости</i>
отлично	46 – 40 баллов
хорошо	39 – 34 баллов
удовлетворительно	33 – 28 баллов
неудовлетворительно	менее 28 баллов

2 семестр

<i>Экзаменационная оценка</i>	<i>Рейтинговая оценка успеваемости</i>
отлично	54– 49 баллов
хорошо	48 – 43 баллов
удовлетворительно	42 –36 баллов
неудовлетворительно	менее 36 баллов

Распределение баллов рейтинговой оценки между видами контроля

- **входной контроль**, проводится на первом занятии для проверки исходного уровня обучающегося и оценки соответствия его уровня требованиям, предъявляемым при изучении дисциплины.

Максимальное число баллов, которое может набрать обучающийся по результатам входного контроля, составляет 10 % от общего количества баллов, 5 баллам (1 семестр). 4 баллам (2 семестр).

- **текущий контроль**, проводится для систематической проверки уровня сформированности компетенций обучающегося во время аудиторных занятий, в соответствии с рабочей программой дисциплины (модуля) в течение семестра.

Максимальное число баллов, которое может набрать обучающийся по результатам текущего контроля, составляет 10 % от общего количества баллов, отводимых на контактную работу в семестре и равно – 5 баллам (1 семестр, 4 баллам (2 семестр)..

- **рубежный контроль**, проводится по окончании изучения дидактической единицы или раздела дисциплины в заранее установленное время для определения уровня сформированности компетенций обучающегося по дисциплине (модулю).

Максимальное число баллов, которое может набрать обучающийся по результатам рубежного контроля, составляет 40 % от общего количества баллов, отводимых на контактную

работу в семестре и равно – 25 баллам (1 семестр), 20 баллам (2 семестр).

- **контроль самостоятельной работы (творческий рейтинг)**, проводится для систематической проверки внеаудиторной самостоятельной работы обучающегося в соответствии с рабочей программой дисциплины (модуля).

Максимальное число баллов, которое может набрать обучающийся по результатам контроля самостоятельной работы, составляет 10 % от общего количества баллов, отводимых на контактную работу в семестре и равно –5 баллам (1 семестр, 4 баллам (2 семестр). .

- **выходной контроль (зачет / экзамен)**, проводится для установления уровня сформированности компетенций обучающегося по дисциплине (модулю).

Максимальное число баллов, которое может набрать обучающийся по результатам выходного контроля, составляет 30 % от общего количества баллов, отводимых на контактную работу в семестре и равно –16 баллам (1 семестр), 14 баллам (2 семестр). .

Обучающийся допускается к выходному контролю (экзамену / зачету), если в процессе обучения по дисциплине (модулю) им набрано не менее 40 % от общего количества баллов дисциплины (модуля), при условии прохождения всех видов контроля, предусмотренных рабочей программой дисциплины (модуля), за исключением выходного.

Обучающийся, не набравший установленный минимум баллов по результатам входного и рубежного контролей, а также контроля самостоятельной работы, может, по согласованию с преподавателем, ликвидировать задолженности в установленные преподавателем сроки во внеаудиторное время до прохождения выходного контроля.

Обучающийся, набравший сумму баллов по входному, рубежным контролям, контролю самостоятельной работы, составляющую более 60 % от общего количества баллов дисциплины, может быть, по обоюдному решению преподавателя и обучающегося, аттестован автоматически – без прохождения выходного контроля по дисциплине (модулю), но не выше оценки «хорошо».

Если обучающийся претендует на более высокие баллы по дисциплине, он обязан пройти выходной контроль.

4.2 Критерии оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Компетенция сформирована на «отлично», если обучающийся демонстрирует знания, умения и владение навыками от 86 % до 100 % от уровня сформированности компетенции.

Компетенция сформирована на «хорошо», если обучающийся демонстрирует знания, умения и владение навыками от 74 % до 85 % от уровня сформированности компетенции.

Компетенция сформирована на «удовлетворительно», если обучающийся демонстрирует знания, умения и владение навыками от 60 % до 73 % от уровня сформированности компетенции.

Если обучающийся демонстрирует знания, умения и владение навыками ниже 60 % от уровня сформированности компетенции, компетенция считается не сформированной.

4.2.1. Критерии оценки устного ответа при текущем контроле и промежуточной аттестации

При ответе на вопрос обучающийся демонстрирует:

знания: основные понятия и методы интегрального исчисления, теории вероятности, математической статистики;

умения: применять изученные понятия и методы интегрального исчисления, теории вероятности, математической статистики для решения типовых задач;

владение навыками: математическими методами в решении задач, возникающих в профессиональной практике и научно-исследовательской деятельности

Критерии оценки**

отлично	<p>обучающийся демонстрирует:</p> <ul style="list-style-type: none"> - знание материала (методов линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления в понятиях и методах теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории вероятностей и математической статистики), практики применения материала, исчерпывающе и последовательно, четко и логично излагает материал, хорошо ориентируется в материале, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий; - умение (<i>решать задачи по математическому анализу, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в понятиях и методах теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории вероятностей и математической статистики</i>), используя современные методы и показатели такой оценки;
хорошо	<p>обучающийся демонстрирует:</p> <ul style="list-style-type: none"> - знание материала, не допускает существенных неточностей; - в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы, умение (указываются конкретные умения в зависимости от специфики дисциплины), используя современные методы и показатели такой оценки; - в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы или сопровождающееся отдельными ошибками владение навыками методы и приемы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления,)
удовлетворительно	<p>обучающийся демонстрирует:</p> <ul style="list-style-type: none"> - знания только основного материала, но не знает деталей, допускает неточности, допускает неточности в формулировках, нарушает логическую последовательность в изложении программного материала; - в целом успешное, но не системное умение (применять приемы и методы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления для решения учебных задач), используя современные методы и показатели оценки оценки в зависимости от специфики дисциплины);
неудовлетворительно	<p>обучающийся:</p> <ul style="list-style-type: none"> - не знает значительной части программного материала, плохо ориентируется в материале (линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления для решения учебных задач), не знает практику применения материала, допускает существенные ошибки; - не умеет использовать методы и приемы (линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления, теории вероятностей и математической статистики для решения учебных задач), допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий, предусмотренных программой дисциплины, не выполнено; -

4.2.2 Критерии оценки для письменного опроса

При письменном опросе обучающийся демонстрирует:

знания: теоретического материала для решения ситуационных задач;

умения: решать ситуационные задачи

владение навыками: анализа изучаемой ситуации.

Критерии оценки письменного опроса

отлично	ответ на вопросы задачи дан правильно. Объяснение хода её решения подробное, последовательное, грамотное, с теоретическими обоснованиями (в том числе из лекционного курса); ответы на дополнительные вопросы верные, чёткие, протокол заполнен. –
хорошо	– ответ на вопросы задачи дан правильно. Объяснение хода её решения подробное, но недостаточно логичное, с единичными ошибками в деталях, некоторыми затруднениями в теоретическом обосновании (в том числе из лекционного материала); ответы на дополнительные вопросы верные, но недостаточно чёткие.
удовлетворительно	– ответы на вопросы задачи даны правильно. Объяснение хода её решения недостаточно полное, не-последовательное, с ошибками, слабым теоретическим обоснованием (в том числе лекционным материалом); ответы на дополнительные вопросы недостаточно четкие, с ошибками в деталях, протокол заполнен частично или с ошибками.
неудовлетворительно	– ответы на вопросы задачи даны неправильно. Объяснение хода её решения дано неполное, не-последовательное, с грубыми ошибками, без теоретического обоснования; ответы на дополнительные вопросы неправильные (отсутствуют), протокол не заполнен или содержит ошибки, неточности.

4.2.3. Критерии оценки доклада

Критериями оценки доклада являются: новизна материала, обоснованность выбора источников литературы, степень раскрытия сущности вопроса,

При устном докладе обучающийся демонстрирует:

знания: теоретического материала для раскрытия сущности вопроса, источников литературы;

умения: раскрыть сущность изучаемого вопроса;

владение навыками: анализа и выводов изучаемой проблемы.

Критерии оценки устного доклада

отлично	обучающийся демонстрирует: - знание материала (материал систематизирован и структурирован; сделаны обобщения и сопоставления различных точек зрения по рассматриваемому вопросу, сделаны и аргументированы основные выводы, отчетливо видна самостоятельность суждений, основные понятия проблемы изложены полно и глубоко) - грамотность и культура изложения; - дает правильные ответы на вопросы аудитории при презентации доклада
хорошо	обучающийся демонстрирует: - знание материала (материал систематизирован и структурирован; сделаны обобщения и сопоставления различных точек зрения по рассматриваемому вопросу, сделаны и аргументированы основные выводы)

	- дает неточные ответы на вопросы аудитории при презентации доклада
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: - неполное знание материала (в материале представлена одна точка зрения, отсутствует самостоятельность суждений) - не отвечает на вопросы аудитории при презентации доклада
неудовлетворительно	обучающийся: - не выполнил доклад

4.2.4. Критерии оценки выполнения контрольных работ

При выполнении контрольных работ обучающийся демонстрирует:

знания: теоретического материала по изученной теме или разделу;

умения: применять теоретический материал для решения учебных задач;

владение навыками: математическими методами в решении задач, возникающих в профессиональной практике и научно-исследовательской деятельности

Критерии оценки выполнения контрольных работ

отлично	обучающийся демонстрирует: - полностью выполненную работу; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала);
хорошо	обучающийся демонстрирует: - полностью выполненную работу, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: - работу, где допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но студент владеет обязательными умениями.
неудовлетворительно	обучающийся: - допустил принципиальные ошибки в выполнении заданий, показавшие, что студент не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

4.2.5. Критерии оценки выполнения типовых расчетов

При выполнении типовых расчетов обучающийся демонстрирует:

знания: теоретического материала по изученной теме или разделу;

умения: применять теоретический материал для решения учебных задач;

владение навыками: в решении задач, возникающих в профессиональной практике и научно-исследовательской деятельности

Критерии оценки выполнения типовых расчетов

отлично	обучающийся демонстрирует: - полностью выполненную работу; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного
----------------	---

	материала);
хорошо	обучающийся демонстрирует: <ul style="list-style-type: none"> – полностью выполненную работу, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: <ul style="list-style-type: none"> – работу, где допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но студент владеет обязательными умениями.
неудовлетворительно	обучающийся: <ul style="list-style-type: none"> – допустил принципиальные ошибки в выполнении заданий, показавшие, что студент не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

4.2.6. Критерии оценки выполнения тестовых заданий

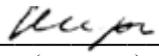
При выполнении тестовых заданий обучающийся демонстрирует:

знания: основных математических понятий и методов изучаемой темы или раздела.

Критерии оценки выполнения тестовых заданий

отлично	обучающийся демонстрирует: <ul style="list-style-type: none"> – правильность ответов не менее чем 85 % тестовых заданий;
хорошо	обучающийся демонстрирует: <ul style="list-style-type: none"> – правильность ответов не менее чем 70 % тестовых заданий;
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: <ul style="list-style-type: none"> – правильность ответов не менее 51 % тестовых заданий;
неудовлетворительно	обучающийся: <ul style="list-style-type: none"> – правильность ответов менее чем на 50 % тестовых заданий.

Разработчик(и): доцент, Кириллова Т.В.


(подпись)