

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Соловьев Дмитрий Александрович
Должность: ректор ФГБОУ ВО Вавиловский университет
Дата подписания: 08.09.2025 13:14:40
Уникальный программный ключ:
528682d78e671e566ab07f01fe1ba2172f735a12

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный университет генетики,
биотехнологии и инженерии имени Н.И. Вавилова»**

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
 / Буйлов В.Н.
«22» мая 2024 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Дисциплина	Теория игр
Направление подготовки	09.03.03 ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА
Направленность (профиль)	Проектирование информационных систем
Квалификация выпускника	Бакалавр
Нормативный срок обучения	4 года
Форма обучения	заочная
Кафедра-разработчик	Общеобразовательные дисциплины
Ведущий преподаватель	Кочегарова О.С., доцент

Разработчик(и): доцент, Кочегарова О.С.


(подпись)

Саратов 2024

Содержание

1	Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП	3
2	Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	5
3	Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы	7
4	Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы их формирования	33

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП

В результате изучения дисциплины «Теория игр» обучающиеся, в соответствии с ФГОС ВО по программе бакалавриата 09.03.03 Прикладная информатика, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 19.09.2017г. №922, формируют следующие компетенции, указанные в таблице 1.

Таблица 1

Формирование компетенций в процессе изучения дисциплины «Теория игр»

Компетенция		Структурные элементы компетенции (в результате освоения дисциплины обучающий должен знать, уметь, владеть)	Этапы формирования компетенции в процессе освоения ОПОП (семестр)*	Виды занятий для формирования компетенции	Оценочные средства для оценки уровня сформированности компетенции
Код	Наименование				
1	2	3	4	5	6
ПК-11	Способен применять методический аппарат при управлении БПЛА	знает: - базовые понятия и положения теории игр - возможности применения теории игр для анализа социально-экономических процессов - методы исследования социально-экономических процессов в целях прогнозирования возможных угроз экономической безопасности - возможности теории игр для анализа и оценки возможных экономических рисков - научные принципы теории игр для прогнозирования развития основных угроз экономической безопасности	1	Лекции, практические занятия, самостоятельная работа	Контрольные работы 1-11 Самостоятельные работы 1-6
		умеет: - проводить анализ постановки			

		задачи по выбору решений, связанных с исследованием социально-экономических процессов -исследовать социально-экономические процессы в целях прогнозирования возможных угроз экономической безопасности - использовать методы теории игр для анализа и прогнозирования развития основных угроз экономической безопасности - проводить анализ постановки задачи по выбору решений в различных ситуациях, используя модель, получить результат - строить игровые модели реальных социально-экономических ситуаций и процессов для прогнозирования развития основных угроз			
		владеет - навыками выбора подходящего типа игры для моделирования конкретной ситуации, связанной с исследованием социально-экономических процессов - навыками анализа и интерпретирования ситуаций, связанных с экономическими рисками - использования теоретико-игровых методов для прогнозирования динамики развития основных угроз			

		экономической безопасности			
--	--	----------------------------	--	--	--

Компетенция **ПК-11** – также формируется в ходе освоения дисциплин: Имитационное и компьютерное моделирование, Технологическая (проектно-технологическая) практика, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2

Перечень оценочных средств*

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ОМ
1	контрольная работа	средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по разделу или нескольким разделам	контрольных работы по вариантам
2	тестирование	метод, который позволяет выявить уровень знаний, умений и навыков, способностей и других качеств личности, а также их соответствие определенным нормам путем анализа способов выполнения обучающимися ряда специальных заданий	банк тестовых заданий
3	самостоятельная работа	самостоятельная работа обучающегося – это такая его деятельность, которую он выполняет без непосредственного участия преподавателя, но по его заданию и под его наблюдением. Обучающийся, обладающий навыками самостоятельной работы, активнее и глубже усваивает учебный материал, оказывается лучше подготовленным к творческому труду, к самообразованию и продолжению учебы.	Самостоятельные работы по вариантам
4	устный опрос	метод контроля, позволяющий не только опрашивать и контролировать знания обучающихся, но и сразу же поправлять, повторять и закреплять знания, умения и навыки.	банк вопросов

Программа оценивания контролируемой дисциплины «Теория игр»

№ п/п	Контролируемые разделы (темы дисциплины)	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4
1	Матричные игры. Игры с седловой точкой	ПК-11	Контрольная работа №1
2	Аналитический метод решения матричной игры	ПК-11	Контрольная работа №2

Описание показателей и критериев оценивания компетенций по дисциплине «Теория игр» на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Код компетенции и, этапы освоения компетенции	Планируемые результаты обучения	Показатели и критерии оценивания результатов обучения			
		ниже порогового уровня (неудовлетворительно)	пороговый уровень (удовлетворительно)	продвинутый уровень (хорошо)	высокий уровень (отлично)
1	2	3	4	5	6
ПК-11 6 семестр	<i>знает о способах и методах самообразования в рамках дисциплины Теория игр</i>	обучающийся не знает значительной части программного материала, плохо ориентируется в понятиях и методах теории игр, не знает практику применения материала, допускает существенные ошибки	обучающийся демонстрирует знания только основного материала, но не знает деталей, допускает неточности в формулировках, нарушает логическую последовательность в изложении программного материала	обучающийся демонстрирует знание материала, не допускает существенных неточностей	обучающийся демонстрирует знание основных понятий и методов теории игр, практики применения материала, исчерпывающе и последовательно, четко и логично излагает материал, хорошо ориентируется в материале, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий
	<i>умеет: использовать математический аппарат для самообразования</i>	не умеет использовать методы и приемы теории игр, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий, предусмотренных программой дисциплины, не выполнено	в целом успешное, но не системное умение применять приемы и методы теории игр для решения учебных задач	в целом успешное, но содержащие отдельные пробелы, умение применять приемы и методы теории игр для решения учебных задач	сформированное умение применять понятия и методы теории игр для решения учебных задач

	владеет навыками: <i>реализации полученных знаний и умений для самообразования</i>	обучающийся не владеет навыками применения математических знаний и методов при решении прикладных задач теории игр, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий предусмотренных программой дисциплины не выполнено	в целом успешное, но не системное владение навыками применения математических знаний и методов теории игр при решении прикладных задач	в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы или сопровождающееся отдельными ошибками владение навыками применения математических знаний и методов теории игр при решении прикладных задач	успешное и системное владение навыками применения математических знаний и методов теории игр при решении прикладных задач и интерпретировать получаемые результаты
--	--	--	--	---	--

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

3.1 Контрольные работы

Тематика контрольных работ устанавливается в соответствии с тематикой пройденного лекционного курса.

Количество вариантов для каждого задания – 20.

Контрольная работа №1 МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

1 Теоретическая часть

Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры

Игра – это идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц (игроков), интересы которых различны, что и порождает конфликт. Конфликт не обязательно предполагает наличие антагонистических противоречий сторон, но всегда связан с определенного рода разногласиями. Антагонизм интересов порождает конфликт, а совпадение интересов сводит игру к координации действий (кооперации).

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций.

Цель теории игр – выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам. Эти правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат

игры в зависимости от сложившейся ситуации. Правилами устанавливается также конец игры.

В теории игр предполагается, что игра состоит из ходов, выполняемых игроками одновременно или последовательно. Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется **ходом** игрока.

Совокупность ходов, предпринятых игроками от начала до окончания игры, называется **партией**.

Одним из основных понятий теории игр является понятие **стратегии**.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Для того чтобы **решить игру**, или найти **решение игры**, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию **оптимальности**, т.е. один из игроков должен получить **максимальный выигрыш**, когда второй придерживается своей стратегии. В тоже время второй игрок должен иметь **минимальный проигрыш**, если первый придерживается своей стратегии. Такие **стратегии** называются **оптимальными**. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию **устойчивости**, т.е. любому из игроков должно быть не выгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если игра повторяется достаточно много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а **средний выигрыш (проигрыш)** во всех партиях.

Повторим, что **целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока**.

Рассмотрим парную конечную игру с нулевой суммой. Пусть игрок A располагает m личными стратегиями $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$. Пусть у игрока B имеется n личных стратегий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$. В этом случае говорят, что **игра имеет размерность $m \times n$** . В результате выбора игроками любой пары стратегий A_i и B_j ($i = 1, 2, 3, \dots, m$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$) однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш a_{ij} игрока A (положительный или отрицательный) и проигрыш $(-a_{ij})$ игрока B .

Предположим, что значения a_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i, B_j) .

Матрица $P = (a_{ij})_{m \times n}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$), элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i и B_j , называется *платежной матрицей* или *матрицей игры*

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Поставим задачу: определить оптимальные стратегии игроков.

Выбирая стратегию A_i , игрок A должен рассчитывать на то, что игрок B ответит на нее той стратегией B_j , для которой выигрыш для игрока A будет минимален (игрок B стремится «навредить» игроку A).

Обозначим через α_i наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока B (наименьшее число в i -ой строке платежной матрицы), т. е. $\alpha_i = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$.

Следовательно, для получения наибольшего выигрыша игроку A нужно выбирать ту из стратегий, для которой число α_i максимально. Среди чисел α_i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) выберем наибольшее $\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i$.

Число $\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$ называется *нижней ценой игры*, или *максимальным выигрышем (максимином)*. Это *гарантированный выигрыш*

игрока A при любой стратегии игрока B .

Стратегия, соответствующая максимину, называется **максиминной стратегией**.

Таким образом, если игрок A будет придерживаться максиминной стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньше, чем α , при любом поведении игрока B .

Проанализируем теперь платежную матрицу с точки зрения игрока B , заинтересованного в том, чтобы игрок A выиграл, как можно меньше.

Если игрок B выберет стратегию B_j , то все возможные выигрыши игрока A будут элементами j -го столбца платежной матрицы P . В наихудшем для игрока B случае, когда игрок A применяет стратегию, соответствующую максимальному элементу этого столбца, выигрыш игрока B будет равен числу $\beta_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$.

Следовательно, игроку B нужно выбрать такую стратегию, для которой число β_j минимально.

Число $\beta = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$ называется **верхней ценой игры**, или **минимаксным выигрышем (минимаксом)**. Это **гарантированный выигрыш** игрока B при любой стратегии игрока A .

Стратегия, соответствующая минимаксу, называется **минимаксной стратегией**.

Таким образом, если игрок B применяет минимаксную стратегию, то игрок A не может выиграть больше, чем β .

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» максиминной и минимаксной стратегий соответственно, называется **принципом минимакса**. Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника.

Нетрудно показать, что нижняя цена игры никогда не превосходит верхней цены игры, т.е. $\alpha \leq \beta$.

Если нижняя и верхняя цены игры совпадают, т.е. $\alpha = \beta$, то игру называют **игрой с седловой точкой**.

Для игры с седловой точкой общее значение нижней и верхней цены игры

$V = \alpha = \beta$ называется *ценой игры*.

Рассмотрим такой элемент платежной матрицы $a_{i_0 j_0}$, который соответствует минимаксным стратегиям A_{i_0} и B_{j_0} . Этот элемент является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, и выполняются равенства

$$V = \alpha = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij_0} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{i_0 j} = \beta.$$

Следовательно, выполняется равенство $a_{i_0 j_0} = V$.

Элемент платежной матрицы $a_{i_0 j_0}$ называется *седловой точкой*.

Как известно, в геометрии точку на поверхности, являющуюся одновременно минимумом по одной оси координат и максимумом по другой, называют седловой точкой (см. рис. 10.1).

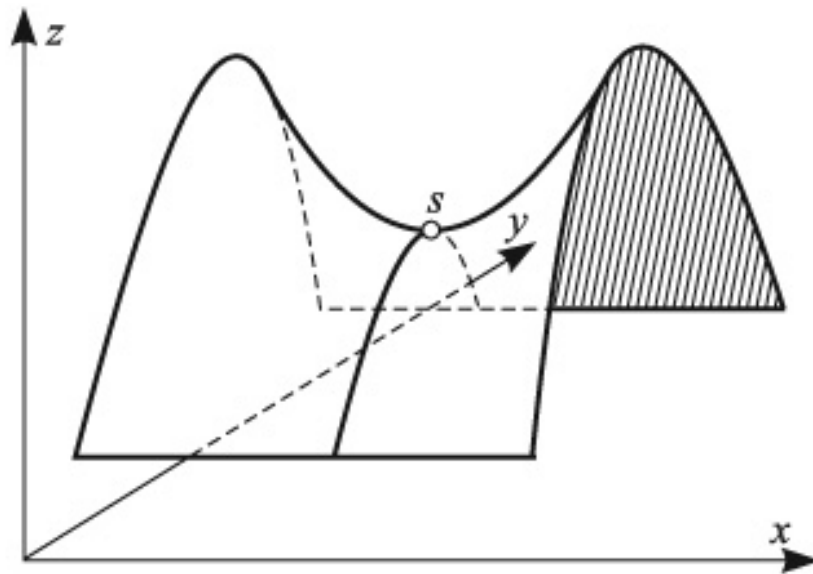


Рис. 10.1. Поверхность с седловой точкой

По аналогии с геометрией элемент $a_{i_0 j_0}$ называют седловой точкой, а об игре говорят, что она имеет седловую точку.

Минимаксные стратегии A_{i_0} и B_{j_0} , которые соответствуют седловой точке, являются *оптимальными стратегиями*, а их совокупность — *оптимальным решением* или *решением игры*. В этом случае игрок A

получает максимальный гарантированный (не зависящий от поведения игрока B) выигрыш V , а игрок B добивается минимального гарантированного (не зависящего о поведения игрока A) проигрыша V .

В случае игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают своеобразной «устойчивостью»: если одна сторона придерживается своей оптимальной стратегии, то для другой может быть только невыгодным отклоняться от своей. Заметим, что тогда наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока. Если он не хочет действовать против своих же интересов, то он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы «положением равновесия». Любое отклонение от оптимальной стратегии приводит отклоняющегося игрока к невыгодным последствиям, вынуждающим его вернуться в исходное положение.

2 Практическая часть

Пр и м е р 1. Предприниматель собирается вложить сумму в количестве 100 тыс. руб. в предприятие. У него есть четыре альтернативы A_1, A_2, A_3, A_4 выбора формы заключения договора с партнером. Прибыль предпринимателя зависит от того, какую из альтернатив поведения B_1, B_2, B_3, B_4 выберет его партнер и совет директоров (у партнера – контрольный пакет акций). Оценки выигрышей предпринимателя для каждой пары альтернатив (A_i, B_j) ($i=\overline{1,4}, j=\overline{1,4}$) приведены в

платежной матрице (a_{ij}) :
$$\begin{pmatrix} 30 & 60 & 30 & 70 \\ 60 & 50 & 40 & 70 \\ 50 & 60 & 30 & 50 \\ 40 & 70 & 40 & 90 \end{pmatrix} \quad (\text{прибыль приводится в}$$

процентах годовых от вложения).

Определить оптимальную стратегию вложения денег для предпринимателя, если партнер получает тем большую прибыль, чем меньшую прибыль получает предприниматель, поэтому в задачу партнера входит минимизация прибыли предприятия.

Решение. Рассмотрим ситуацию с точки зрения предпринимателя (далее будем называть его *игрок 1*, а альтернативы его поведения A_i ($i=\overline{1,4}$), соответственно, *стратегиями*).

Если первый игрок выбирает i -ую стратегию (i -ую строку платежной матрицы), то партнер (далее будем называть его **игрок 2**, а альтернативы его поведения B_j ($j=\overline{1,4}$), соответственно, **стратегиями**) выберет такую j -ую стратегию (j -ый столбец платежной матрицы), которая обеспечит ему наибольшую прибыль, а, следовательно, игроку 1 наименьшую прибыль. То есть, игрок 2 выберет такой столбец платежной матрицы, в котором прибыль игрока 1 минимальна.

Переберем все стратегии игрока 1 ($i=\overline{1,4}$) и выберем ту из них, при которой игрок 2, соблюдая свои интересы, позволит получить игроку 1 наибольшую прибыль. Величина

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,4}} \min_{j=\overline{1,4}} a_{ij}$$

называется **нижней ценой игры**, а соответствующая ей стратегия первого игрока **максиминной**. Нижняя цена игры α представляет собой гарантированный выигрыш игрока 1.

Припишем справа от строк платежной матрицы минимальные элементы каждой строки:

$$\begin{pmatrix} 30 & 60 & 30 & 70 \\ 60 & 50 & 40 & 70 \\ 50 & 60 & 30 & 50 \\ 40 & 70 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{matrix} 30 \\ 40 \\ 30 \\ 40 \end{matrix}$$

и выбрав из них наибольший, получим нижнюю цену игры:

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,4}} \{30; 40; 30; 40\} = 40.$$

Переберем теперь все стратегии игрока 2 ($j=\overline{1,4}$) и выберем ту из них, при которой игрок 2 обеспечит себе минимальную потерю прибыли. Величина

$$\beta = \min_{j=\overline{1,4}} \max_{i=\overline{1,4}} a_{ij}$$

называется **верхней ценой игры**, а соответствующая ей стратегия второго игрока **минимаксной**. Верхняя цена игры β представляет собой величину противоположную минимальной гарантированной прибыли первого игрока.

Припишем снизу от столбцов платежной матрицы максимальные элементы каждого столбца:

$$\begin{pmatrix} 30 & 60 & 30 & 70 \\ 60 & 50 & 40 & 70 \\ 50 & 60 & 30 & 50 \\ 40 & 70 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{matrix} 60 \\ 70 \\ 60 \\ 90 \end{matrix}$$

60 70 40 90

и выбрав из них наименьший, получим верхнюю цену игры:

$$\beta = \min_{j=1,4} \{60; 70; 40; 90\} = 40.$$

В данном случае нижняя цена игры равна верхней: $\alpha = \beta$, а значит игра имеет *седловую точку* a_{23} :

$$\begin{pmatrix} 30 & 60 & 30 & 70 \\ 60 & 50 & [40] & 70 \\ 50 & 60 & 30 & 50 \\ 40 & 70 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{matrix} 30 \\ [40] \\ 30 \\ 40 \end{matrix}$$

$$60 \quad 70 \quad [40] \quad 90 \quad \gamma = \alpha = \beta = 40$$

Величина $\gamma = 40$ называется *ценой игры*.

Седловой точке соответствует пара *чистых стратегий* A_3, B_2 :

$$\begin{matrix} & & [A_3] \\ B_1 & \begin{pmatrix} 30 & 60 & 30 & 70 \end{pmatrix} \\ [B_2] & \begin{pmatrix} 60 & 50 & [40] & 70 \end{pmatrix} \\ B_3 & \begin{pmatrix} 50 & 60 & 30 & 50 \end{pmatrix} \\ B_4 & \begin{pmatrix} 40 & 70 & 40 & 90 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

которые являются оптимальными для первого и второго игроков.

Таким образом, если предприниматель выберет свою оптимальную альтернативу A_3 , а его партнер выберет свою оптимальную альтернативу B_2 , то они могут гарантировать себе:

- предприниматель – прибыль не менее $\gamma = 40$ процента годовых от вложения;
- партнер – получение предпринимателем прибыли не более $\gamma = 40$ процента годовых от вложения.

Если предприниматель выберет свою оптимальную альтернативу A_3 , а партнер отклонится от своей оптимальной альтернативы B_2 , то прибыль предпринимателя увеличится. Если же партнер выберет свою оптимальную альтернативу B_2 , а предприниматель отклонится от своей оптимальной альтернативы A_3 , то прибыль предпринимателя уменьшится.

Таким образом, игрокам не выгодно отклоняться от оптимальных чистых стратегий в случае, когда игра имеет седловую точку.

Пример 1. Найти нижнюю и верхнюю цены игры

с платежной матрицей $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем платежную матрицу игры в общем виде. В каждой строке платежной матрицы найдем наименьший элемент и запишем его справа от матрицы (табл. 10.1). Получим

Таблица 10.1

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Минимальный элемент в строке α_i
A_1	3	2	1	4	1
A_2	10	4	3	10	3
A_3	-2	4	1	2	-2

← max

Тогда **нижняя цена** игры будет равна $\alpha = \max\{1, 3, -2\} = 3$.

В каждом столбце платежной матрицы найдем наибольший элемент, и запишем его снизу от матрицы (табл. 10.2). Получим

Таблица 10.2

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	2	1	4
A_2	10	4	3	10
A_3	-2	4	1	2
Максимальный элемент в столбце β_j	10	4	3	10

↑
min

Тогда **верхняя цена** игры будет равна: $\beta = \min\{10, 4, 3, 10\} = 3$.

О т в е т : $\alpha = 3$ – нижняя цена игры; $\beta = 3$ – верхняя цена игры.

3 Индивидуальные задания

ЗАДАНИЕ № 1. Для игры с платежной матрицей P найти оптимальные стратегии игроков и цену игры

ВАРИАНТ № 1

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 6

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 2

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 7

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 3

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 8

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 4

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 9

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 5

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 8 & 5 & 5 & 9 & 11 \\ 8 & 3 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 10

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 11

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 16

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 12

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 2 & 16 \\ 6 & 8 & 8 & 18 \\ 12 & 16 & 10 & 18 \\ 14 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 17

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 3 & 17 \\ 7 & 9 & 9 & 19 \\ 15 & 17 & 11 & 19 \\ 15 & 5 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 13

$$P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 18

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & 2 \\ 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 14**ВАРИАНТ № 19**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 15

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 21

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 22

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 23

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 24

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 25

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 20

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 26

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 2 & 10 & 6 \\ 3 & 10 & 5 \\ 4 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 27

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 28

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 29

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 30

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 6 & 9 \\ 9 & 9 & 6 & 8 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Контрольная работа №2

Аналитический метод решения матричной игры

1. Теоретическая часть

Игры, повторяемые многократно. Смешанные стратегии

Если партнеры играют только *один раз*, то игрокам целесообразно придерживаться *принципа минимакса*, как в игре с седловой точкой, так и в игре без седловой точки.

В случае *многократного повторения игры с седловой точкой* игрокам также целесообразно придерживаться *принципа минимакса*.

Если же многократно повторяется игра без седловой точки, то постоянное использование минимаксных стратегий становится невыгодным.

Действительно, в игре без седловой точки элемент платежной матрицы $a_{i_0 j_0}$, соответствующий минимаксной стратегии игрока A , не обязан быть минимальным в своей строке. Следовательно, игрок B , зная о том, что игрок A в следующей игре будет использовать минимаксную стратегию A_{i_0} , может выбрать стратегию, отвечающую минимальному элементу строки i_0 . В результате выигрыш игрока A уменьшится от величины $a_{i_0 j_0}$ до величины α . Аналогично может поступить и игрок A , неожиданно применив против игрока B стратегию, соответствующую максимальному элементу столбца j_0 .

Более того, доказано, что при многократно повторяемой игре без седловой точки, игроку A , для обеспечения среднего выигрыша большего

чем α , следует чередовать свои стратегии $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$. Игроку B для улучшения результата также целесообразно чередовать свои стратегии $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$.

По этой причине для многократно повторяемых игр без седловой точки вводится понятие *смешанной стратегии*.

В играх, которые повторяются многократно, каждая из стратегий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ называется *чистой стратегией*.

Смешанной стратегией S_A игрока A называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$, причем сумма вероятностей равна 1 ($p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_m = 1$).

Смешанные стратегии игрока A записываются в виде матрицы

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

или в виде строки $S_A = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_m)$.

Аналогично определяются и обозначаются смешанные стратегии S_B игрока B :

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix} \text{ или } S_B = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n), \text{ где сумма}$$

вероятностей появления стратегий равна 1 ($q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = 1$).

З а м е ч а н и е. Чистые стратегии можно считать частным случаем смешанных и задавать строкой, в которой 1 соответствует чистой стратегии.

Смешанные стратегии, избранные игроками, называются *оптимальными*, если одностороннее отклонение любым игроком от своей оптимальной стратегии может изменить средний выигрыш только в сторону невыгодную для игрока.

Совокупность, состоящая из оптимальной стратегии одного игрока и оптимальной стратегии другого игрока, называется *оптимальным решением* или *решением игры*.

Средний выигрыш V при применении обоими игроками оптимальных стратегий называется **ценой игры**.

В 1928 году фон Нейманом была доказана **основная теорема теории игр**, утверждающая, что **каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий**.

Поскольку все чистые стратегии являются частными случаями смешанных стратегий, то из основной теоремы теории игр можно получить:

следствие 1. Любая игра имеет цену;

следствие 2. Цена игры удовлетворяет неравенству $\alpha \leq V \leq \beta$.

Стратегии, входящие в оптимальную стратегию с отличной от нуля вероятностью, называются **активными**.

Справедлива **теорема об активных стратегиях**: *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то средний выигрыш остается неизменным и равным цене игры V , если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий*.

Эта теорема имеет большое практическое значение, так как указывает методы нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Аналитический метод решения игры размера 2×2

Рассмотрим игру размера 2×2 с платежной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Такая игра является простейшим случаем конечной игры. Если она имеет седловую точку, то оптимальное решение – это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

Игра, в которой отсутствует седловая точка, в соответствии с основной теоремой теории игр, имеет оптимальное решение, которое определяется парой смешанных стратегий $S_A^* = \begin{pmatrix} p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$ и $S_B^* = \begin{pmatrix} q_1^* & q_2^* \end{pmatrix}$.

Для того чтобы их найти воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии S_A^* , то его средний выигрыш будет равен цене игры V , какой бы активной

стратегией ни воспользовался игрок B . В данной игре обе чистые стратегии игрока B являются активными, поскольку в противном случае игра имела бы решение в чистых стратегиях, т.е. была бы игрой с седловой точкой. Выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) – случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока (оптимальная стратегия) будет равен V и для первой, и для второй стратегии противника.

Средний выигрыш игрока A , если он использует оптимальную смешанную стратегию $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$, а игрок B чистую стратегию B_1 (это соответствует первому столбцу платежной матрицы P) равен цене игры V :

$$a_{11} \cdot p_1^* + a_{21} \cdot p_2^* = V.$$

Тот же средний выигрыш получит игрок A , если второй игрок применяет стратегию B_2 , т.е. $a_{12} \cdot p_1^* + a_{22} \cdot p_2^* = V$. Учитывая, что $p_1^* + p_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной

стратегии S_A^* и цены игры V :

$$\begin{cases} a_{11} \cdot p_1^* + a_{21} \cdot p_2^* = V, \\ a_{12} \cdot p_1^* + a_{22} \cdot p_2^* = V, \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера, получим оптимальную стратегию

$$p_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & -1 \\ 0 & a_{22} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -1 \\ a_{12} & a_{22} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})},$$

$$p_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & -1 \\ a_{12} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -1 \\ a_{12} & a_{22} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

и цену игры

$$V = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -1 \\ a_{12} & a_{22} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}.$$

Аналогичным образом можно найти оптимальную стратегию

$S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$ игрока B . В этом случае неизвестные q_1^*, q_2^* и V

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11} \cdot q_1^* + a_{12} \cdot q_2^* = V, \\ a_{21} \cdot q_1^* + a_{22} \cdot q_2^* = V, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases} \quad \text{решение}$$

которой имеет вид:

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}, \\ q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}, \\ V = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}. \end{cases}$$

2 Практическая часть

Пример 1. Решить игру с платежной матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем α – верхнюю и β – нижнюю цены игры:

$$\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\alpha = \max_{i=1,2} \{-1; 0\} = 0 \quad \text{и} \quad \beta = \min_{j=1,2} \{5; 11\} = 5.$$

В данном случае $\alpha \neq \beta$, то есть в игре отсутствует седловая точка и применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии, то есть переходя к смешанным стратегиям.

Под **смешанной стратегией первого игрока** понимается применение его стратегий A_1, A_2 с вероятностями p_1, p_2 , соответственно, что

записывается в виде:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Под **смешанной стратегией второго игрока** понимается применение его стратегий B_1, B_2 с вероятностями q_1, q_2 , соответственно:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad q_1 + q_2 = 1.$$

Оптимальное решение игры (или **решение**) игры – это пара смешанных оптимальных стратегий S_A^*, S_B^* , обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, будет определять **цену игры** γ .

Если первый игрок использует оптимальную смешанную стратегию $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$, а второй игрок использует чистую стратегию B_1 (это

соответствует 1-му столбцу платежной матрицы), то средний выигрыш первого игрока будет равен цене игры: $a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = \gamma$,

а в данном случае: $-1p_1^* + 5p_2^* = \gamma$.

Тот же средний выигрыш получает первый игрок, если второй игрок применяет стратегию B_2 , то есть: $a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = \gamma$,

а в данном случае: $11p_1^* + 0p_2^* = \gamma$.

Учитывая, что $p_1 + p_2 = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии первого игрока и цены игры:

$$\begin{cases} -1p_1^* + 5p_2^* = \gamma, \\ 11p_1^* + 0p_2^* = \gamma, \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases}$$

Решим систему. Подставив полученное из второго уравнения выражение $\gamma = 11p_1^*$ в первое уравнение, получаем: $5p_2^* = 12p_1^*$,

откуда: $p_1^* = \frac{5}{12}p_2^*$ и третье уравнение принимает вид:

$$\frac{5}{12}p_2^* + p_2^* = 1.$$

Таким образом, система принимает вид:

$$\begin{cases} p_2^* = \frac{12}{17}, \\ \gamma = \frac{55}{17}, \\ p_1^* = \frac{5}{17}. \end{cases}$$

Найдена оптимальная смешанная стратегия первого игрока:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{5}{17} & \frac{12}{17} \end{pmatrix} \text{ и цена игры } \gamma = 3\frac{4}{17}.$$

Аналогичным образом находится оптимальная смешанная стратегия второго игрока. Если второй игрок использует оптимальную смешанную стратегию $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1^* & q_2^* \end{pmatrix}$, а первый игрок использует чистую стратегию A_1 (это соответствует 1-ой строке платежной матрицы), то средний выигрыш второго игрока будет равен цене игры: $a_{11} q_1^* + a_{12} q_2^* = \gamma$,

а в данном случае:
$$-1 q_1^* + 11 q_2^* = \gamma.$$

Если же второй игрок использует оптимальную смешанную стратегию $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1^* & q_2^* \end{pmatrix}$, а первый игрок использует чистую стратегию A_2 (это соответствует 2-ой строке платежной матрицы), то средний выигрыш второго игрока будет равен цене игры: $a_{21} q_1^* + a_{22} q_2^* = \gamma$,

а в данном случае:
$$5 q_1^* + 0 q_2^* = \gamma.$$

Учитывая, что $q_1^* + q_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии второго игрока и цены игры:

$$\begin{cases} -1 q_1^* + 11 q_2^* = \gamma, \\ 5 q_1^* + 0 q_2^* = \gamma, \\ q_1^* + q_2^* = 1, \end{cases} \quad \text{которая эквивалентными преобразованиями}$$

приводится к виду:

$$\begin{cases} q_2^* = \frac{6}{11} q_1^*, \\ 5 q_1^* = \gamma, \\ q_1^* + q_2^* = 1, \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{11}{17}, \\ q_2^* = \frac{6}{17}, \\ \gamma = \frac{55}{17}. \end{cases}$$

Найдена оптимальная смешанная стратегия второго игрока:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{11}{17} & \frac{6}{17} \end{pmatrix} \quad \text{и цена игры } \gamma = 3\frac{4}{17}.$$

Таким образом, найдены оптимальные смешанные стратегии первого

игрока $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{5}{17} & \frac{12}{17} \end{pmatrix},$

второго игрока $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{11}{17} & \frac{6}{17} \end{pmatrix}$ и цена игры $\gamma = 3\frac{4}{17}.$

3 Индивидуальные задания

ЗАДАНИЕ № 2. Решить аналитическим методом игру с платежной матрицей P

ВАРИАНТ № 1

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 7

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 13

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 2

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 8

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 17 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 14

$$P = \begin{pmatrix} -9 & 15 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 3

$$P = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 9

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 15

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 4

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 10

$$P = \begin{pmatrix} -9 & 17 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 16

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 5

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 18 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 11

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 17

$$P = \begin{pmatrix} -9 & 16 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 6

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 12

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 18

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 19

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 23

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 27

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 20

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 24

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 28

$$P = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 21

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 25

$$P = \begin{pmatrix} -10 & -16 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ № 29

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Вопросы и упражнения для самоконтроля и повторения

1. Дайте определение оптимальных стратегий.
2. Сформулируйте условие, которому должны удовлетворять оптимальные стратегии?
3. Опишите критерии, по которым в теории игр осуществляется нахождение оптимальной стратегии?
4. Дайте определение цены игры.
5. Дайте определения чистых стратегий игроков.
7. Дайте определения смешанных стратегий игроков.
8. Опишите аналитический метод решения игры 2×2 для первого игрока.
9. Опишите аналитический метод решения игры 2×2 для второго игрока.
10. приведите формулу для вычисления цены в матричной игре 2×2 , при отсутствии седловой точки.

9. Для матричной игры $P = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 7 \\ 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ верно утверждение:

- 1) стратегия A_2 доминирует стратегию A_3 ;
- 2) стратегия A_3 доминирует стратегию A_2 ;
- 3) стратегия A_1 доминирует стратегию A_2 ;
- 4) стратегия A_2 доминирует стратегию A_1 .

10. Решение матричной игры в смешанных стратегиях целесообразно, если:

- 5) игра повторяется один раз;
- 6) игра имеет седловую точку;
- 7) игра повторяется большое число раз;
- 8) нижняя и верхняя цены игры равны.

11. Если α – нижняя чистая цена игры, β – верхняя чистая цена игры, то для любой матричной игры верно неравенство:

- 9) $\alpha < \beta$;
- 2) $\alpha \leq \beta$;
- 3) $\alpha > \beta$;
- 4) $\alpha \geq \beta$.

1. В задачах 4.1- 4.20 даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

- длину стороны АВ;
- уравнения сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты;
- угол В в радианах;
- уравнение медианы АЕ;
- уравнение и длину высоты СД;
- уравнение окружности, для которой высота СД есть диаметр;
- уравнение прямой, проходящей через точку Е параллельно стороне АВ, и точку ее пересечения с высотой СД;
- систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.

4.1	A(1;-1)	B(4;3)	C(5;1)
4.2	A(0;-1)	B(3;3)	C(4;1)
4.3	A(1;-2)	B(4;2)	C(5;0)
4.4	A(2;-2)	B(5;2)	C(6;0)
4.5	A(0;0)	B(3;4)	C(4;2)
4.6	A(0;1)	B(3;5)	C(4;3)
4.7	A(3;-2)	B(6;2)	C(7;0)
4.8	A(3;-3)	B(6;1)	C(7;-1)
4.9	A(-1;1)	B(2;5)	C(3;3)
4.10	A(4;0)	B(7;4)	C(8;2)
4.11	A(2;2)	B(5;6)	C(6;4)
4.12	A(4;-2)	B(7;2)	C(8;0)
4.13	A(0;2)	B(3;6)	C(4;4)
4.14	A(4;1)	B(7;5)	C(8;3)
4.15	A(3;2)	B(6;6)	C(7;4)
4.16	A(-2;1)	B(1;5)	C(2;3)
4.17	A(4;-3)	B(7;1)	C(8;-1)
4.18	A(-2;2)	B(1;6)	C(2;4)
4.19	A(5;0)	B(8;4)	C(9;2)
4.20	A(2;3)	B(5;7)	C(6;5)

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

4.1 Процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Контроль результатов обучения обучающихся, этапов и уровня формирования компетенций по дисциплине «Теория игр» осуществляется через проведение входного, текущего, рубежных, выходного контролей и контроля самостоятельной работы

Формы текущего, промежуточного и итогового контроля, порядок начисления баллов и фонды контрольных заданий для текущего контроля разрабатываются кафедрой исходя из специфики дисциплины, и утверждаются на заседании кафедры.

4.2 Критерии оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Описание шкалы оценивания достижения компетенций по дисциплине приведено в таблице 6.

Таблица 6

Уровень освоения компетенции	Отметка по пятибалльной системе (промежуточная аттестация)*			Описание
высокий	«отлично»	«зачтено»	«зачтено (отлично)»	Обучающийся обнаружил всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умеет свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоил основную литературу и знаком с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, обучающийся проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании материала
базовый	«хорошо»	«зачтено»	«зачтено (хорошо)»	Обучающийся обнаружил полное знание учебного материала, успешно выполняет предусмотренные в программе задания, усвоил основную литературу, рекомендованную в программе
пороговый	«удовлетворительно»	«зачтено»	«зачтено (удовлетворительно)»	Обучающийся обнаружил знания основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением практических заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой, допустил погрешности в ответе на

Уровень освоения компетенции	Отметка по пятибалльной системе (промежуточная аттестация)*			Описание
				экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя
—	«неудовлетворительно»	«не зачтено»	«не зачтено (неудовлетворительно)»	Обучающийся обнаружил пробелы в знаниях основного учебного материала, допустил принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой практических заданий, не может продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности по окончании образовательной организации без дополнительных занятий

* - форма промежуточной аттестации в семестре определяется в соответствии с таблицей 2 рабочей программы дисциплины (модуля)

4.2.1. Критерии оценки устного ответа при промежуточной аттестации

При ответе на вопрос обучающийся демонстрирует:

знания: о способах и методах самоорганизации самообразования в рамках освоения дисциплины Теория игр; об основных законах математики.

умения: использовать математический аппарат в практической деятельности, производить расчеты по известному алгоритму; задавать вопросы по изученным темам; сравнивать по аналогии алгоритмы решения практических задач.

владение навыками: методами построения и реализации математических моделей для решения научно-исследовательских задач; повторением стандартной процедуры решения типовых математических задач по изученным темам; применением методов построения математических моделей и интерпретацией полученных результатов;

использованием полученных знаний к изучению следующих дисциплин курса.

Критерии оценки^{**}

отлично	обучающийся демонстрирует: всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умение свободно выполнять практические задания, предусмотренные программой, усвоивший основную литературу и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной программой.	
хорошо	обучающийся демонстрирует: полное знание учебного материала, успешно выполняющий предусмотренные в программе практические задания, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе. Обучающийся, показывает систематический характер знаний по дисциплине и способен к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.	
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: знания основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением практических заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой.	
неудовлетворительно	обучающийся демонстрирует: пробелы в знаниях основного учебного материала, допускает принципиальные ошибки в выполнении практических заданий, предусмотренных программой.	

4.2.2. Критерии оценки выполнения контрольных (самостоятельных) работ

отлично	обучающийся демонстрирует: высокий результат, ответил правильно и в развернутом виде на все теоретические (практические) вопросы, не допускает ошибок в ответе при решении конкретной задачи.
хорошо	обучающийся демонстрирует: хороший результат, ответил правильно на все теоретические (практические) вопросы, но в краткой форме, либо допустил одну ошибку в ответе при решении конкретной задачи.
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: удовлетворительный результат, правильно отвечает только на часть поставленных теоретических (практических) вопросов при решении конкретной задачи.
неудовлетворительно	обучающийся демонстрирует: неудовлетворительный результат не ответил на поставленные теоретические (практические) вопросы или ответил неправильно.

4.2.4. Критерии оценки выполнения тестовых заданий

При выполнении тестовых заданий обучающийся демонстрирует:

знания: о способах и методах самоорганизации самообразования в рамках освоения дисциплины Теория игр; об основных законах математики.

умения: использовать математический аппарат в практической деятельности, производить расчеты по известному алгоритму; задавать вопросы по изученным темам; сравнивать по аналогии алгоритмы решения

практических задач.

владение навыками: методами построения и реализации математических моделей для решения научно-исследовательских задач; повторением стандартной процедуры решения типовых математических задач по изученным темам; применением методов построения математических моделей и интерпретацией полученных результатов; использованием полученных знаний к изучению следующих дисциплин курса.

Критерии оценки выполнения тестовых заданий

отлично	обучающийся демонстрирует: отличные знания и отвечает на тестовые задания в пределах 86%-100%.
хорошо	обучающийся демонстрирует: хорошие знания и отвечает на тестовые задания в пределах 74%-85%.
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: удовлетворительные знания и отвечает на тестовые задания в пределах 60%-73%.
неудовлетворительно	обучающийся демонстрирует: неудовлетворительные знания и отвечает на тестовые задания ниже 60%.

Разработчик: доцент, Кочегарова О.С.

