Приложение 3.2

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет имени Н. И. Вавилова»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

«ДИНАМИКА»

краткий курс лекций

для студентов II курса

Специальности

20.05.01 «Пожарная безопасность»

Саратов 2016

УДК 531.1
ББК 22.21
П38

Рецензенты:

Доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика», кандидат технических наук, доцент «Поволжского филиала Московского государственного университета путей сообщения» *А.П. Маштаков*

Доцент кафедры «Детали машин, подъемно-транспортные машины и сопротивление материалов», кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Саратовский ГАУ» *В.В. Криловецкий*

П38 **Теоретическая механика**: краткий курс лекций для студентов II курса специальности направление подготовки 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» / Сост.: М.Г. Загоруйко, А.М. Марадудин, А.В. Перетятько, А.А. Леонтьев // ФГОУ ВО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2016. – 52 с.

Краткий курс лекций по дисциплине «Теоретическая механика» составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов специальности 20.05.01 «Пожарная безопасность». Содержит основные сведения по разделу теоретической механики «Динамика». Направлен на формирование у студентов и профессиональных компетенций, необходимых для эффективного использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности при решении различных инженерных задач.

УДК 531.1
ББК 22.21

Введение

Теоретическая механика – фундаментальная естественнонаучная дисциплина, лежащая в основе современной техники и являющаяся наукой, в которой изучаются перемещения тел с течением времени (т.е. механические движения). На материале курса теоретической механики базируются такие важные для общего инженерного образования дисциплины, как «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин и основы конструирования», «Теория наземных транспортно-технологических машин» и др., а также большое число специальных инженерных дисциплин, посвящённых изучению движения как отдельных механизмов, так и машин в целом, а также разработке методов расчёта и эксплуатации таких объектов, как промышленные и гражданские здания, мосты, тоннели, плотины, водоводы, трубопроводы и многое другое.

Краткий курс лекций по дисциплине «Теоретическая механика» (раздел «Динамика») предназначен для студентов специальности 20.05.01 «Пожарная безопасность». Динамика представляет собой наиболее общий раздел механики, имеющий особое значение для решения многих практических задач в различных областях техники. Курс нацелен на формирование у студентов профессиональных компетенций, необходимых для эффективного использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности при решении различных инженерных задач.

ДИНАМИКА

Лекция 1

Законы динамики. Предмет динамики.

1.1. Основные понятия и определения.

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Опыт показывает, что если одну и ту же силу приложить к двум разным покоящимся телам, то по истечении одного и того же промежутка времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости.

Инертностью называется свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Количественной мерой инертности данного тела является физическая величина, называемая ***массой тела.***

В механике масса m рассматривается как скалярная величина, положительная и постоянная для каждого тела.

В общем случае движение тела зависит и от его формы. Чтобы отвлечься при первоначальном изучении динамики от формы тела, вводится понятие о материальной точке.

Материальной точкой называют материальное тело (имеющее массу), размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

Курс (раздел) динамики обычно разделяют на динамику точки и динамику механической системы, в частности, твердого тела.

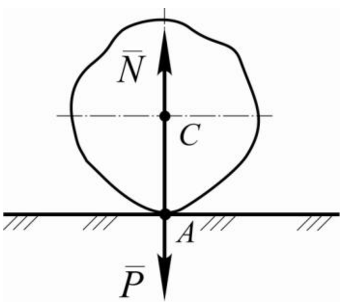
1.2. Законы динамики.

В основе динамики лежат законы, установленные в результате обобщения результатов громадного количества опытов и практической деятельности человека. Впервые эти законы были изложены И. Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687).

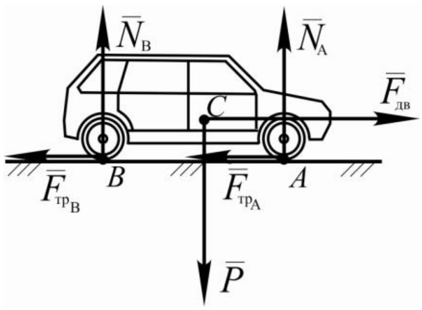
Первый закон инерции (открыт Галилеем в 1638 г.) гласит: «Если на материальную точку действует система взаимно уравновешенных сил, то точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения».

Этот закон отражает одно из основных свойств материи – пребывать неизменно в движении.

Движение, совершаемое точкой при наличии сил, называется ***движением по инерции.***

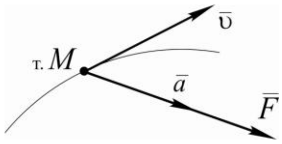


$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{N} = 0$$
$$\upsilon = 0$$



$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{N} + \overline{F}_c + \overline{F}_\partial = 0$$
$$\upsilon = const$$

Второй закон – основной закон динамики (2-ой закон Ньютона): «Ускорение, сообщаемое материальной точке, действующей на нее силой, прямо пропорционально ее величине, направлено по этой силе и обратно пропорционально массе точки, т. е. $\overline{a} = \dfrac{\overline{F}}{m}$



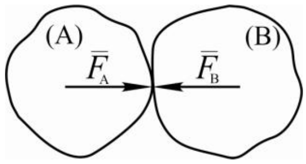
Этот закон обычно записывают в виде $\overline{F} = m\overline{a}$ или $F = ma$

Из этого закона непосредственно видно, что масса тела является мерой его инертности в поступательном движении.

При падении на землю с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве установлено, что тело имеет одно и то же ускорение g= 9,81 м/с² – ускорение свободного падения тела. Тогда на основании 2-го закона динамики,

$P = mg$, или масса тела $m = \dfrac{P}{g}$.

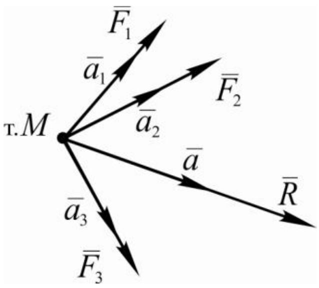
Третий закон – закон равенства действия и противодействия: «Две материальные точки (тела) действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.»



$$F_1 = F_2,\ \overline{F}_1 = -\overline{F}_2$$

Этот закон устанавливает характер взаимодействия между телами. Из него следует, что $F_A = F_B$; $\overline{F}_A = -\overline{F}_B$. В природе не может существовать одностороннего действия сил.

Четвертый закон – закон независимости действия сил: «Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то ускорение этой точки равно геометрической сумме ускорений, сообщаемых этой точке каждой силой в отдельности».



$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ – равнодействующая сила.

$$\overline{R} = m\overline{a},\ \overline{F}_1 = m\overline{a}_1,\ \overline{F}_2 = m\overline{a}_2,\ \overline{F}_3 = m\overline{a}_3$$

$$m\overline{a} = m\overline{a}_1 + m\overline{a}_2 + m\overline{a}_3,$$

откуда

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3.$$

В этом случае основной закон динамики примет вид:

$$\overline{F}_1 = m\overline{a}_1, \text{ или } m\overline{a} = \sum \overline{F}_i$$

Вопросы для самоконтроля

1) Сформулируйте основные законы механики.
2) Какое уравнение называется основным уравнением динамики?
3) Назовите основные механические единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

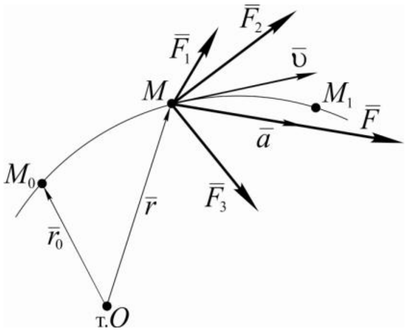
1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 2

Динамика свободной материальной точки.

2.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в векторной форме.

Пусть т. *M* движется под действием сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ по некоторой траектории $M_0 M M_1$ по закону $\bar{r} = \bar{r}(\bar{F}_i)$, где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки *M*. Заменим силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ их равнодействующей $\bar{F} = \bar{F}_1, + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \sum_{i=1}^{k} \bar{F}_i$. Запишем основной закон динамики в виде $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i$.



Из кинематики известно, что $\bar{a} = \dfrac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$.

Тогда, подставляя значение $\bar{a}$ в основной закон динамики, получим:

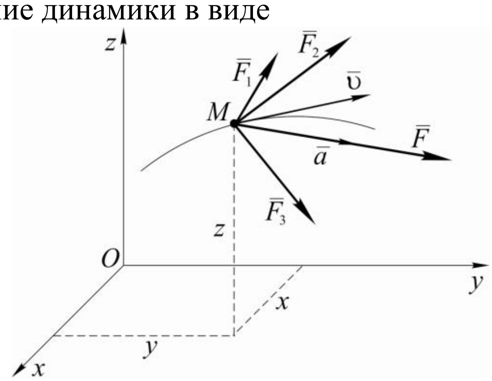
$$m\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \sum \bar{F}_i \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_i \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) и представляют собой дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме. Причем уравнение (1) – первого, а уравнение (2) – второго порядка.

2.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах.

Пусть т. *M* движется под действием сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ по некоторой траектории $M_0 M M_1$ Заменим силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ их равнодействующей $\bar{F} = \bar{F}_1, + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \sum_{i=1}^{k} \bar{F}_i$. Запишем основное уравнение динамики в виде



$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i \qquad (1)$$

Спроектируем это уравнение на оси координат, тогда получим

$$ma_x = \sum X_i\,,\ ma_y = \sum Y_i\,,\ ma_z = \sum Z_i \qquad (2)$$

Из кинематики известно, что

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,,\ a_y = \frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\,,\ a_z = \frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \qquad (3)$$

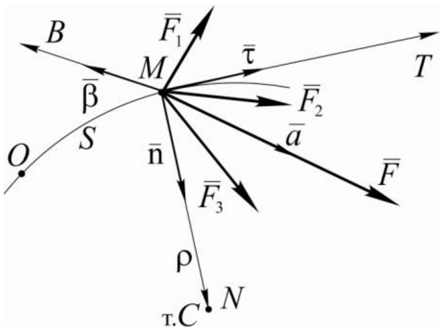
Тогда, подставляя значения a_x, a_y, a_z в (2), получим:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} &= \sum X_i \\ m\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} &= \sum Y_i \\ m\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t} &= \sum Z_i \end{aligned} \qquad (4) \qquad\qquad \begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= \sum X_i \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= \sum Y_i \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= \sum Z_i \end{aligned} \qquad (5)$$

Уравнения (4) и (5) и представляют собой Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах соответственно первого и второго порядков.

2.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественной форме (форме Эйлера).

Пусть т. *M* движется под действием сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$. Заменим силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ их равнодействующей



$$\bar{F} = \bar{F}_1, + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \sum_{i=1}^{k} \bar{F}_i \qquad (1)$$

Возьмем естественные оси координат *T, N, B* затем покажем единичные орты $\bar{\tau}\ \bar{n}\ \bar{\beta}$. Движение точки описывается в естественной форме в виде закона $S = f(\rho)$, где S – дуговая координата, ρ – радиус кривизны траектории.

Запишем основное уравнение динамики

$$m\bar{a} = \bar{F} \qquad (2)$$

Спроектируем это уравнение на оси естественной системы координат:

$$ma_\tau = F_\tau\,,\ ma_n = F_n\,,\ ma_\beta = F_\beta \qquad (3).$$

Из кинематики известно, что $a_\beta = 0$, то и $F_\beta = 0$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2};\ \ a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{dS}{dt}\right)^2}{\rho}.$$

Тогда, подставляя значения a_τ, a_n, a_β в (3), будем иметь:

Дифференциальные уравнения в форме Эйлера

1-го порядка	2-го порядка
$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau$	$m\frac{d^2 S}{dt^2} = F_\tau$
$m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n$	$m\frac{\left(\frac{dS}{dt}\right)^2}{\rho} = F_n$

Эти дифференциальные уравнения используются в том случае, если известно уравнение траектории точки.

2.4. Две основные задачи динамики точки.

В динамике точки рассматриваются две основные задачи: прямая и обратная или первая и вторая.

2.4.1. Первая прямая задача динамики.

Известны уравнения движения точки в некоторой системе координат $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$ и известна ее масса m.

Найти действующую на тело силу *F*.

Эта задача решается в следующей последовательности:

Выполняют рисунок.

По уравнениям движения точки находят проекции скорости на оси

Координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

Определяют проекции ускорения точки на оси координат

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt};\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt};\ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt}.$$

Определяют проекции силы на оси координат, используя основное уравнение динамики в координатной форме

$$F_x = ma_x;\ F_y = ma_y;\ F_z = ma_z.$$

Определяют модуль силы $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Определяют направление силы по направляющим косинусам

2.4.2. Вторая (обратная) задача динамики.

Известны масса точки m и действующие на нее силы. Требуется определить уравнения движения этой точки в выбранной системе координат.

Эта задача решается в следующей последовательности:

Выполняют рисунок к задаче, на котором изображают точку в трех ее положениях: начальном, промежуточном и конечном. В начальном и конечном положениях показывают вектор скорости (если она есть), в промежуточном – все действующие на точку силы.

Выбирают систему координат, направляя оси таким образом, чтобы проекции скорости на эти оси в начальный момент времени, были положительны.

Выписывают начальные и конечные условия движения точки, отнеся к ним: координаты точки, моменты времени и проекции скорости на координатные оси.

Составляют дифференциальные уравнения движения точки в выбранной системе координат.

Разделяют в дифференциальных уравнениях переменные и дважды их интегрируют в результате чего получают уравнения движения.

Используя начальные условия движения точки, определяют постоянные интегрирования.

Найденные постоянные интегрирования подставляют в полученные уравнения движения.

Используя конечные условия движения точки из уравнений движения, определяют те или иные искомые величины.

Примечание. В случае движения несвободной точки, т. е. в случае, когда точка из-за наличия наложенных на нее связей, вынуждена двигаться по заданной неподвижной поверхности или кривой, используют аксиому связей (принцип освобождаемости от связей), согласно которому всякую несвободную материальную точку можно рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее действие реакцией этой связи N.

В этом случае основной закон динамики примет вид

$$m\overline{a} = \sum \overline{F_i} + \overline{N}$$

где $\overline{F_i}$ – действующие на точку активные силы, $\overline{N}$ – реакция связи.

В этом случае 1-ая задача динамики сводится к определению реакции связи, а вторая (основная) распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить: а) закон движения точки; б) реакцию наложенной связи.

Вопросы для самоконтроля

1) Какие уравнения динамики называются естественными уравнениями движения материальной точки?
2) Методика решения прямой задачи динамики?
3) Методика решения обратной задачи динамики?
4) Как определяются постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.

4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

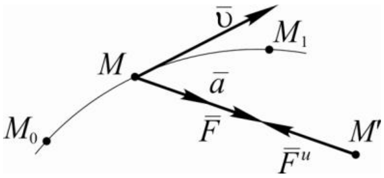
1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 3

Динамика относительного движения материальной точки.

3.1. Понятие о силе инерции.

Пусть материальная точка M движется под действием силы $\overline{F}$ с ускорением $\overline{a}$. $\overline{F}$ сила, с которой т. M_1 действует на т. M. Действие т. M_1 на т. M будет определяться 2-м законом динамики $\overline{F} = m\overline{a}$.



По закону равенства действия и противодействия со стороны т. M на т. M_1 будет действовать сила $\overline{F}^u$, равная по модулю силе $\overline{F}$ и направленная по той же прямой в противоположную сторону, т. е.

$$\overline{F}^u = -\overline{F} .$$

Или

$$\overline{F}^u = -m\overline{a} \tag{1}$$

Модуль силы

$$\overline{F}^u = ma \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) и определяют силу инерции.

Силой инерции материальной точки называется сила, равная по модулю произведению массы материальной точки на модуль ее ускорения, направленная противоположно ускорению и приложенная к телу, сообщающему это ускорение.

В том случае, когда движется несвободная материальная точка, ее сила инерции приложена к связям, наложенным на эту точку.

3.2. Виды сил инерции точечной массы.

Существует столько видов сил инерции точечной массы, сколько имеется видов ускоренной точки.

Полная сила инерции $\overline{F}^u = -m\overline{a}$;

Касательная сила инерции $\overline{F}_\tau^u = -m\overline{a}_\tau$;

Нормальная сила инерции $\overline{F}_n^u = -m\overline{a}_n$;

В случае сложного движения точки:

относительная сила инерции $\overline{F}_r^u = -m\overline{a}_r$;

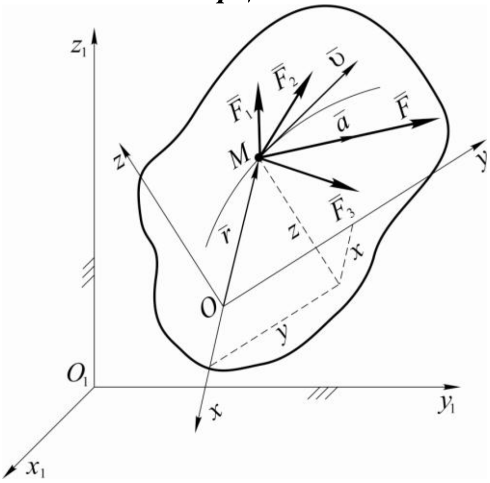
переносная сила инерции $\overline{F}_e^u = -m\overline{a}_e$;

кориолисова сила инерции $\overline{F}_k^u = -m\overline{a}_k$.

В свою очередь относительная и переносная силы инерции могут быть нормальными и касательными: F_{rn}^u, $F_{r\tau}^u$, F_{en}^u, $F_{e\tau}^u$.

3.3. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.

Рассмотрим случай, когда материальная точка движется относительно подвижной системы координат *oxyz*, называемой ***неинерциальной.***



Инерциальной системой отсчета называется неподвижная система координат $o_1x_1y_1z_1$, чаще всего связанная с землей.

Пусть т. *M* совершает сложное движение. 1-ый и 2-ой законы динамики справедливы только для абсолютного движения т. М, т.е. для движения относительно инерциальной системы отсчета. Изучим (рассмотрим) динамику относительного движения т. *M*, т. е. движение относительно неинерциальной системы отсчета, т. е. подвижной системы координат *oxyz*.

Запишем основное уравнение динамики

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_i \tag{1}$$

Так как точка совершает сложное движение, то ее полное (абсолютное) ускорение по теореме Кориолиса будет равно

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$m\overline{a}_r + m\overline{a}_e + m\overline{a}_k = \sum \overline{F}_i$$

или

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_i - m\overline{a}_e - m\overline{a}_k$$

Так как

$$\overline{F}_e^{\,u} = -m\,\overline{a}_e,\ \overline{F}_k^{\,u} = -m\,\overline{a}_k,$$

то

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_i + \overline{F}_e^{u} + \overline{F}_k^{u} \tag{3}$$

Выражение (3) является основным уравнением динамики относительно движения точки.

Вывод. Все уравнения механики для относительного движения материальной точки составляются также, как и уравнения для абсолютного движения, но при этом к действующим на точку силам нужно добавлять переносную и кариолисову силу инерции, которые прикладываются к точке условно.

Так как

$$\overline{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}\overline{\upsilon}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overline{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

то уравнение (3) можно записать в следующем виде

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{\upsilon}_r}{\mathrm{d}t}=\sum\bar{F}_i+\bar{F}_e^u+\bar{F}_k^u \quad (4)$$

или

$$m\frac{\mathrm{d}^2\bar{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum\bar{F}_i+\bar{F}_e^u+\bar{F}_k^u \quad (5)$$

Выражения (4) и (5) представляют собой дифференциальные уравнения относительного движения точки в векторной форме соответственно 1-го и 2-го порядка.

Спроектируем уравнения (4) и (5) на оси подвижной системы координат, тогда получим:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}\upsilon_{rx}}{\mathrm{d}t}&=\sum X_i+F_{ex}^u+F_{kx}^u\\ m\frac{\mathrm{d}\upsilon_{ry}}{\mathrm{d}t}&=\sum Y_i+F_{ey}^u+F_{ky}^u \quad (6)\\ m\frac{\mathrm{d}\upsilon_{rz}}{\mathrm{d}t}&=\sum Z_i+F_{ez}^u+F_{kz}^u \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}&=\sum X_i+\bar{F}_{ex}^u+\bar{F}_{kx}^u\\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}&=\sum Y_i+\bar{F}_{ey}^u+\bar{F}_{ky}^u \quad (7)\\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}&=\sum Z+\bar{F}_{ez}^u+\bar{F}_{kz}^u \end{aligned}$$

Полученные выражения (6) и (7) являются дифференциальными уравнениями относительного движения точки в декартовых координатах (в координатной форме) соответственно 1-го и 2-го порядка.

3.4. Частные случаи относительного движения материальной точки.

3.4.1. Переносное движение – равномерное вращение вокруг неподвижной оси

$$\omega_e=const\,,\ \varepsilon_e=\frac{\mathrm{d}\omega_e}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\bar{F}_e^u=\bar{F}_{en}^u+\bar{F}_{e\tau}^u$$

$$\bar{F}_{en}^u=-m\bar{a}_{en}\,,$$

т. к. $a_{en}=\omega_e^2\,r\neq0$, то

$$F_{en}^u=m\omega_e^2\,r\neq0\,.$$

$$\bar{F}_{e\tau}^u=-m\bar{a}_{e\tau}\,,$$

т. к. $a_{e\tau}=\varepsilon_e\,r=0$, то $F_{e\tau}^u=0$.

$$F_k^{\,u} = -m\,2\omega_e \upsilon_r \sin(\bar{\omega}_e; \bar{\upsilon}_r) \neq 0$$

Тогда основное уравнение динамики относительного движения точки в этом случае будет иметь вид:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i + \bar{F}_{en}^u + \bar{F}_k^u$$

3.4.2. Переносное движение – неравномерное вращение вокруг неподвижной оси.

$$\omega_e \neq const\,,\ \varepsilon_e = \frac{\mathrm{d}\omega_e}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

$$F_{en}^u = m\omega_e^2\, r \neq 0\,,\ F_{e\tau}^u = m\varepsilon_e\, r \neq 0$$

$$F_k^{\,u} = m\,2\omega_e \upsilon_r \sin(\bar{\omega}_e; \bar{\upsilon}_r) \neq 0.$$

В этом случае основное уравнение относительного движения материальной точки имеет вид:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i + \bar{F}_{en}^u + \bar{F}_{e\tau}^u + \bar{F}_k^u$$

3.4.3. Переносное движение – неравномерное поступательное криволинейное движение.

$$\upsilon_e \neq 0\,,\ \omega_e = 0$$

$$F_{e\tau}^u = m a_e^\tau = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_e}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

$$F_{en}^u = m\,a_e^n = m\frac{\upsilon_e^2}{\rho} \neq 0$$

$$F_k^{\,u} = m\,2\omega_e \upsilon_r \sin(\bar{\omega}_e; \bar{\upsilon}_r) = 0.$$

Тогда основное уравнение относительного движения материальной точки в этом случае будет иметь вид:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i + \bar{F}_{en}^u + \bar{F}_{e\tau}^u$$

3.4.4. Переносное движение – поступательное равномерное прямолинейное движение.

Принцип относительности классической механики.

$$\omega_e = 0\,,\ \upsilon_e = const$$

$$F_{e\tau}^u = m a_e^\tau = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_e}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$F_{en}^u = m\,a_e^n = m\frac{\upsilon_e^2}{\rho} = m\frac{\upsilon_e^2}{\infty} = 0$$

$$F_k^{\,u} = m\,2\omega_e \upsilon_r \sin(\bar{\omega}_e; \bar{\upsilon}_r) = 0.$$

В этом случае основное уравнение относительного движения материальной точки будет иметь вид:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i \quad (1)$$

Сравним уравнение (1) с основным уравнением динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i \quad (2)$$

Из сравнения видно, что в случае, если переносное движение является поступательным равномерным и прямолинейным, то относительное движение точки происходит также как ее абсолютное движение, а подвижная система координат является инерциальной.

Очевидно, что в этом случае, наблюдая за относительным движением материальной точки по отношению к любой инерциальной системе отсчета, невозможно установить, совершает ли эта система равномерное прямолинейное движение или находится в покое. Это положение, называемое принципом относительности классической механики, и формулируется так: "*Никакие механические явления, происходящие в среде, не могут установить, находится ли эта среда в покое или движется поступательно, равномерно и прямолинейно*."

Этот принцип лежит в основе теории относительности.

3.4.5. Случай относительного покоя. Сила тяжести.

Рассмотрим случай, когда материальная точка не совершает относительного движения под действием приложенных к ней сил.

В этом случае: $\upsilon_r = 0$, $a_r = 0$, $F_k{}^u = 0$, $\upsilon_e \neq 0$, $F_e{}^u \neq 0$.

Тогда основное уравнения относительного движения в этом случае примет вид:

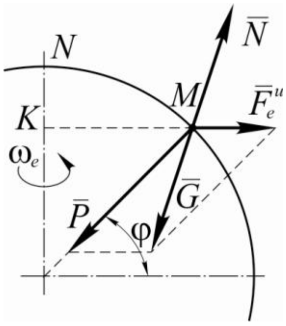
$$\sum \bar{F}_i + \bar{F}_e^u = 0 \quad (1)$$

или

$$\sum \bar{F}_i - m\bar{a}_e = 0.$$

Т. е. в случае относительного покоя материальной точки геометрическая сумма всех действующих на нее сил (активных и реактивных) и переносной силы инерции равна нулю.

В качестве примера рассмотрим относительный покой точки на Земле.



Условие относительного покоя в этом случае выражается равенством (1) в виде:

$$\bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_e^u = 0,$$

где: $\bar{P}$ – сила притяжения Земли (направлена к ее центру); $\bar{N}$ – реакция опоры (Земли).

Очевидно, что действие точки на землю (опору) выражается силой $\bar{G} = -\bar{N}$, т. е.

$$\bar{G} = \bar{P} + \bar{F}_e^u.$$

Таким образом сила тяжести (вес тела) представляет собой равнодействующую силы притяжения Земли и переносной силы инерции. Т. к. $\bar{F}_e^u$ – очень мала, то $\bar{G} \approx \bar{P}$.

Наибольшее значение сила тяжести имеет на полюсе, так как там $P = \max$, $\overline{F}_e^u = 0$, а $g = 9{,}83$ см/с^2 (на экваторе $g = 9{,}78$ м/с²).

Вопросы для самоконтроля

1) Какой модуль и какое направление имеют переносная и кориолисова силы инерции?
2) В чем заключается различие между дифференциальными уравнениями относительного и абсолютного движения материальной точки?
3) Как определяются переносная и кориолисова силы инерции в различных случаях переносного движения?
4) В чем состоит сущность принципа относительности классической механики?
5) Каково условие относительного покоя материальной точки?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 4

Динамика механической системы.

Механической системой называется любая совокупность материальных точек или тел, между которыми существует механическое взаимодействие. Положение или движение каждой точки в этом случае зависит от положения и движения всех остальных.

Твердое тело будем рассматривать также как механическую систему материальных точек, образующих это тело.

4.1. Классификация сил в динамике системы.

В динамике системы принята следующая классификация сил:

I ТИП

Активные (задаваемые силы) – $\overline{F}_i$

Реакции связей (реактивные силы) – $\overline{R}_i$

II ТИП

1) Внешние силы – $\overline{F}_i^E$

2) Внутренние силы – $\overline{F}_i^J$

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны тел, не входящих в состав данной системы.

Внутренними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек этой же системы.

Как внешние так и внутренние силы могут быть в свою очередь или активными или реакциями связей.

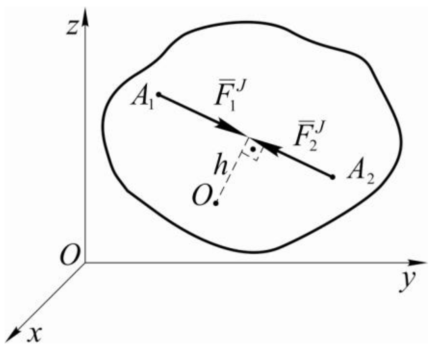
Внутренние силы обладают следующими свойствами:

Свойство 1. Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы и сумма их проекций на любую ось равны нулю.

Свойство 2. Главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра и алгебраическая сумма моментов внутренних сил относительно любой оси равны нулю.

Доказательство основывается на законе равенства действия и противодействия.

$$\overline{F}_1^J = -\overline{F}_2^J;\ F_1 = F_2$$



$\overline{F}^J = \sum \overline{F}_i^J = 0$ – главный вектор внутренних сил системы

$$\sum X_i^J = 0;\ \sum Y_i^J = 0;\ \sum Z_i^J = 0.$$

$$\overline{F}_1^J h + \overline{F}_2^J h = 0.$$

Т. к. $\overline{F}_1^J = -\overline{F}_2^J$, то главный момент внутренних сил системы:

$$\overline{M}_0^J = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_i^{\,J}) = 0 .$$

$$\sum \overline{m}_x(\overline{F}_i^{\,J}) = 0;\ \sum \overline{m}_y(\overline{F}_i^{\,J}) = 0;\ \sum \overline{m}_z(\overline{F}_i^{\,J}) = 0 .$$

Под действием внутренних сил происходит движение отдельных точек системы.

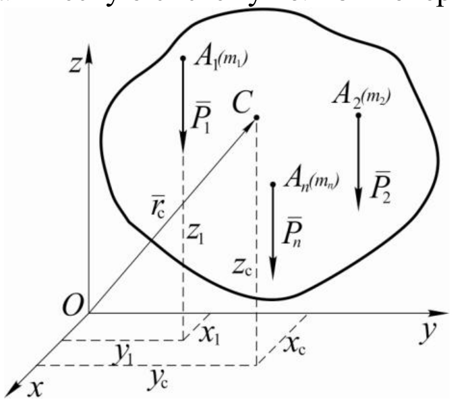
В твердом теле все внутренние силы взаимно уравновешены, поэтому движение отдельных точек под действием внутренних сил не происходит.

4.2. Масса и центр масс механической системы.

Масса механической системы равна сумме масс всех материальных точек, образующих эту систему.

$$M = \sum m_i .$$

Поместим заданную механическую систему вблизи поверхности Земли.



Из статики известны формулы для определения центра тяжести тела:

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i};\ y_c = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i};\ z_c = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} .$$

Так как $P_i = m_i g$, то тогда координаты центра масс механической системы будут определяться по формулам:

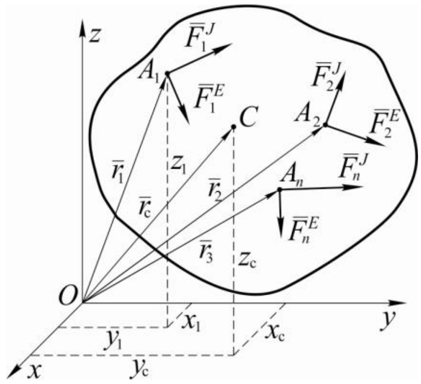
$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M};\ y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M};\ z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M} \qquad (1)$$

Радиус-вектор центра масс:

$$r_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad (2)$$

Центром масс механической системы называется такая геометрическая точка, положение которой определяется по формулам (1) и (2).

4.3. Дифференциальные уравнения движения механической системы.



Для описания движения механической системы можно составить n дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$m_1 \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} = \bar{F}_1^E + \bar{F}_1^J$$

$$m_2 \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = \bar{F}_2^E + \bar{F}_2^J \qquad (1)$$

$$m_n \frac{d^2\bar{r}_n}{dt^2} = \bar{F}_n^E + \bar{F}_n^J$$

Или n дифференциальных уравнений в координатной форме:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1^E + X_1^J$$

$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1^E + Y_1^J$$

$$m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1^E + Z_1^J \qquad (2)$$

$$m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} = X_n^E + X_n^J$$

$$m_n \frac{d^2y_n}{dt^2} = Y_n^E + Y_n^J$$

$$m_n \frac{d^2z_n}{dt^2} = Z_n^E + Z_n^J$$

4.4. Теорема о движении центра масс механической системы.

Центр масс механической системы движется как отдельная материальная точка, обладающая массой всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на механическую систему.

Суммируя (1):

$$\sum m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} = \sum \bar{F}_i^E + \sum \bar{F}_i^J$$

$$\sum \bar{F}_i^J = 0$$

$$\sum m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} = \sum \bar{F}_i^E \qquad (1)$$

Ранее было получено:

$$r_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

Откуда

$$\sum m_i \bar{r}_i = M\bar{r}_c$$

Последнее уравнение продифференцируем дважды по времени

$$\sum m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} = M \frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), будем иметь:

$$M\frac{\mathrm{d}^2\bar{r}_c}{\mathrm{d}t^2}=\sum\bar{F}_i^E \quad (3)$$

Выражение (3) – закон движения центра масс механической системы в векторной форме (второго порядка).

$$M\frac{\mathrm{d}\bar{\upsilon}_c}{\mathrm{d}t}=\sum\bar{F}_i^E \quad (4)$$

то же первого порядка.

Проецируя (3) и (4) на оси *x, y, z*, получим дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы в декартовых координатах 2-го порядка:

$$M\frac{\mathrm{d}^2x_c}{\mathrm{d}t^2}=\sum X_i^E\ ;\ M\frac{\mathrm{d}^2y_c}{\mathrm{d}t^2}=\sum Y_i^E\ ;\ M\frac{\mathrm{d}^2z_c}{\mathrm{d}t^2}=\sum Z_i^E$$

1-го порядка:

$$M\frac{\mathrm{d}\upsilon_{cx}}{\mathrm{d}t}=\sum X_i^E\ ;\ M\frac{\mathrm{d}\upsilon_{cy}}{\mathrm{d}t}=\sum Y_i^E\ ;\ M\frac{\mathrm{d}\upsilon_{cz}}{\mathrm{d}t}=\sum Z_i^E$$

4.5. Закон сохранения движения центра масс (Ц. М.) механической системы. (следствие из теоремы)

Если геометрическая сумма (главный вектор) всех внешних сил, действующих на систему, равна 0, то Ц. М. механической системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

$$M\frac{\mathrm{d}\bar{\upsilon}_c}{\mathrm{d}t}=\sum F_i^E$$

Если $\sum F_i^E=0$, то $M\frac{\mathrm{d}\bar{\upsilon}_c}{\mathrm{d}t}=0$, но $M\neq 0$, следовательно $\frac{\mathrm{d}\bar{\upsilon}_c}{\mathrm{d}t}=0$, значит $\bar{\upsilon}_c=const$.

Что и требовалось доказать.

Кроме того, если вначале движения $\bar{\upsilon}_c=0$, то и в дальнейшем $\bar{\upsilon}_c=0$.

***Следствие*:** если алгебраическая сумма проекций всех внешних сил на координатные оси равна 0, то проекция скорости Ц. М. на ту же ось есть величина постоянная.

$$M\frac{\mathrm{d}\upsilon_{cx}}{\mathrm{d}t}=\sum X_i^E$$

Если $\sum X_i^E=0$; то $M\frac{\mathrm{d}\upsilon_{cx}}{\mathrm{d}t}=0$, но $M\neq 0$, следовательно $\frac{\mathrm{d}\upsilon_{cx}}{\mathrm{d}t}=0$, значит $\bar{\upsilon}_{cx}=const$.

Кроме того, если в начале движения проекция скорости Ц. М. равнялась 0, то и в дальнейшем $\bar{\upsilon}_{cx}=0$.

Вопросы для самоконтроля

1) Как классифицируют в динамике силы, действующие на точки механической системы?
2) Что называют центром масс механической системы и как определяют его координаты?
3) Сформулируйте теорему о движении центра масс системы.

4) При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя и при каких условиях он движется равномерно и прямолинейно?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

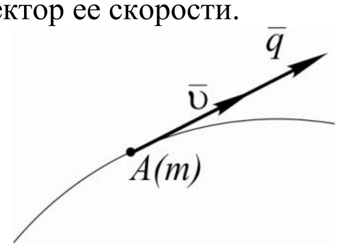
Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 5

Количество движения точки и механической системы.

Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки на вектор ее скорости.

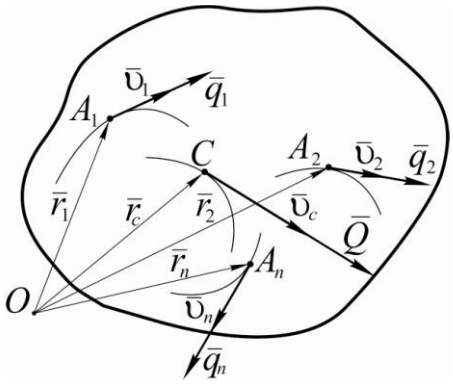


$$\overline{q} = m\overline{\upsilon}$$

Размерность количества движения:

$q = m\upsilon \left[\dfrac{кг \cdot м}{с}\right]$ в системе СИ

Количеством движения механической системы (главным вектором количества движения) называется вектор, равный геометрической сумме векторов количества движения всех точек механической системы.



$$\overline{Q} = \sum \overline{q}_i = \sum m_i \upsilon_i$$

Воспользуемся известной формулой: $r_c = \dfrac{\sum m_i x_i}{M}$

Продифференцируем один раз

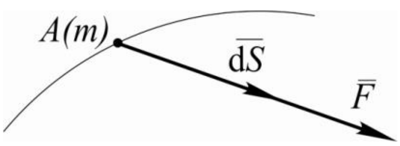
$$\sum m_i \overline{r}_i = M\overline{r}_c \;\Rightarrow\; \sum m_i \frac{\mathrm{d}\overline{r}_i}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\overline{r}_c}{\mathrm{d}t};$$

$$\sum m_i \overline{\upsilon}_i = M\overline{\upsilon}_c \;\Rightarrow\; \overline{Q} = M\,\overline{\upsilon}_c$$

Вектор количества движения механической системы равен произведению массы системы на вектор скорости Ц. М. системы.

5.1. Импульс силы.

Элементарным импульсом силы называется вектор, равный произведению вектора силы на элементарный промежуток времени. Импульс силы есть мера действия силы.



$$d\bar{S} = \bar{F}\ dt$$

Если сила действует в течении определенного промежутка времени, то ее импульс за это время определяется по формуле:

$\bar{S} = \int_0^t \bar{F}\ dt$ – полный импульс силы за некоторый промежуток времени выражается определением интеграла от элементарного импульса силы, взятым в соответственных пределах.

Если $F = const$, то $\bar{S} = \bar{F}\ t$ – импульс постоянной силы.

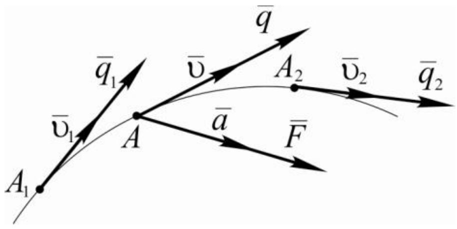
Размерность:

$S = F\,t\ \left[\frac{кг \cdot м}{с^2} \cdot с\right] = \left[\frac{кг \cdot м}{с}\right]$ – в системе СИ

Количество движения точки и импульс силы являются соизмеримыми величинами.

5.2. Теорема об изменении количества движения материальной точки.

Теорема: «*Векторная производная по времени от количества движения материальной точки равна геометрической сумме всех действующих на точку сил*».



$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i$$

$m\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \sum \bar{F}_i$ – основной закон динамики.

$$\frac{d(m\bar{\upsilon})}{dt} = \sum \bar{F}_i$$

Теорема в дифференциальной форме:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum \bar{F}_i \qquad (1)$$

$$\int_{\bar{q}_1}^{\bar{q}_2} dq = \sum \int_0^t \bar{F}_i\, dt\ ;$$

$$\bar{q}_2 - \bar{q}_1 = \sum \bar{S}_i$$

Теорема в интегральной форме:

$$m\bar{\upsilon}_2 - m\bar{\upsilon}_1 = \sum \bar{S}_i \qquad (2)$$

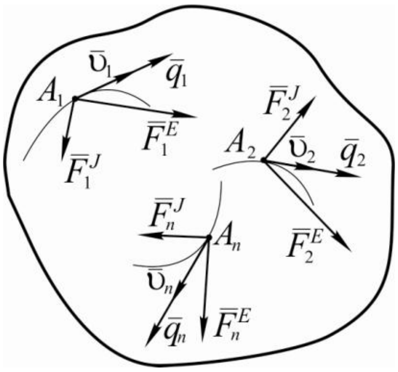
Векторное изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме полных импульсов всех действующих на точку сил за то же самое время.

При использовании этой теоремы необходимо уравнение (2) спроектировать на выбранную систему координат:

$$m\bar{\upsilon}_{2x} - m\bar{\upsilon}_{1x} = \sum \bar{S}_{ix}$$

То есть изменение проекции количества движения материальной точки на любую ось равно алгебраической сумме проекций полных импульсов всех действующих на точку сил на ту же ось.

5.3. Теорема об изменении количества движения механической системы.



Для каждой точки системы:

$$\frac{d\bar{q}_1}{dt} = \bar{F}_1^E + \bar{F}_1^J$$

$$\frac{d\bar{q}_n}{dt} = \bar{F}_n^E + \bar{F}_n^J$$

$$\sum \frac{d\bar{q}_i}{dt} = \sum \bar{F}_i^E + \sum \bar{F}_i^J \text{ , } \bar{F}_i^J = 0$$

$$\frac{d\sum \bar{q}_i}{dt} = \sum \bar{F}_i^E$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_i^E \qquad (1)$$

Теорема в дифференциальной форме: «*Векторная производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему*».

Теорема в проекциях на координатные оси будет иметь вид:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum X_i^E$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \sum Y_i^E \qquad (2)$$

$$\frac{dQ_z}{dt} = \sum Z_i^E$$

Производная по времени от проекции количества движения механической системы на некоторую ось равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих на систему, на ту же ось.

Если разделить переменные в (1) и проинтегрировать его в соответствующих пределах, то получим запись теоремы в интегральной форме:

$$\int_{Q_1}^{Q_2} d\bar{Q} = \sum \int_0^t \bar{F}_i^E \, dt$$

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum \bar{S}_i^E \qquad (3)$$

Векторное изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме полных импульсов всех внешних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.

Векторному уравнению (3) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum S_{ix}^E$$

$$Q_{2y} - Q_{1y} = \sum S_{iy}^E \qquad (4)$$

$$Q_{2z} - Q_{1z} = \sum S_{iz}^E$$

Уравнения (4) показывают, что изменение проекции количества движения механической системы на любую ось равно алгебраической сумме проекций импульсов всех внешних сил, действующих на систему, на ту же ось.

При решении задач обычно пользуются уравнениями (4). Эти уравнения также, как и уравнения (2), не содержат внутренних сил, что имеет большое практическое значение.

5.4. Закон сохранения количества движения механической системы. (следствие из теоремы)

Если геометрическая сумма (главный вектор) всех внешних сил, действующих на механическую систему, равна 0, то вектор количества движения этой системы по модулю и направлению есть величина постоянная

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_i^E, \text{ если } \sum \overline{F}_i^E = 0, \text{ то } \frac{d\overline{Q}}{dt} = 0.$$

Следовательно $\overline{Q} = const$.

Если в начале движения $\overline{Q}_0 = 0$, то и в дальнейшем $\overline{Q} = 0$.

Если алгебраическая сумма проекций всех внешних сил, действующих на механическую систему на некоторую ось, равна 0, то проекция количества движения системы на эту же ось есть величина постоянная,

если $\sum X_i^E = 0$, то $\dfrac{dQ_x}{dt} = 0$.

Следовательно $Q_x = const$.

Если в начале движения $Q_{x_0} = 0$, то и в дальнейшем $Q_x = 0$.

Количество движения механической системы может изменяться только под действием внешних сил, приложенных к этой системе.

Под действием внутренних сил, действующих на систему, могут изменяться только количества движения отдельных материальных точек этой же системы.

Вопросы для самоконтроля

1) Как определяется импульс переменной силы за конечный промежуток времени?
2) Что характеризует импульс силы?
3) Чему равен импульс равнодействующей?
4) Что называется количеством движения механической системы?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.

2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

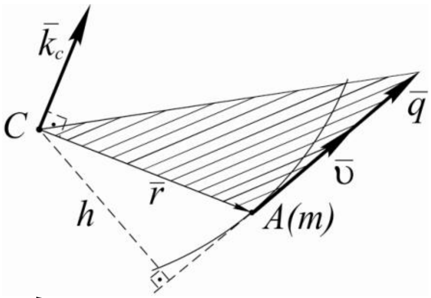
1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 6

Момент количества движения точки и механической системы.

6.1. Момент количества движения материальной точки относительно некоторого центра.

Точка С – произвольно выбранный центр.



Из статики известно: $\overline{m}_c(\overline{F}) = \overline{r}\,\overline{F}$ – вектор момента силы.

По аналогии

$$\overline{k}_c = \overline{r}\,\overline{q} = \overline{r}\,m\overline{\upsilon}$$

Моментом количества движения материальной точки относительно некоторого центра называется вектор, равный векторному произведению радиуса – вектора, проведенного из данного центра в эту точку, на вектор количества движения точки.

Направление вектора $\overline{k}_c$ определяется правилом векторного произведения. Он всегда перпендикулярен плоскости перемножаемых векторов $\overline{r}$ и $\overline{q}$.

Модуль вектора момента количества движения определяется по формуле:

$$k_c = r\,q \sin(;\overline{q}) = r\,m\upsilon \sin(;\overline{\upsilon})$$

Из чертежа следует, что $h = r\sin(;\overline{\upsilon})$

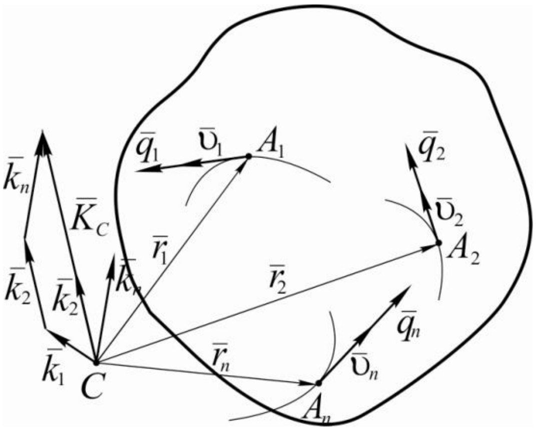
Тогда $k_c = m\upsilon h = qh$, где h – плечо вектора $\overline{q}$.

Размерность:

$k_c = r\,m\upsilon \sin(;\overline{\upsilon})$, $\left[\dfrac{кг \cdot м^2}{с}\right]$ в системе СИ

6.2. Момент количества движения механической системы (кинетический момент).

$$\overline{K}_c = \sum \overline{k}_c = \sum \overline{r}_i\, m_i\, \overline{\upsilon}_i$$



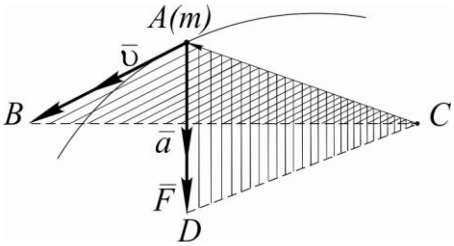
Кинетический момент механической системы относительно некоторого центра есть вектор, равный геометрической сумме моментов количества движения всех материальных точек системы относительно данного центра.

6.3. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки.

Теорема: «*Векторная производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра равна геометрической сумме моментов всех действующих на точку сил относительно того же центра*», то есть

$$\frac{d\bar{k}_c}{dt} = \sum \bar{m}_c(\bar{F}_i).$$

Предположим, что движение т. *A* происходит под действием силы $\bar{F}$ с ускорением $\bar{a}$.



Проведем из произвольного центра «С» в точку А радиус-вектор $\bar{r}$. И еще уточним, что сила $\bar{F} = \sum \bar{F}_i$ равнодействующая (гл. вектор) всех действующих на точку сил. Определим момент силы $\bar{F}$ относительно этого центра по формуле из статики:

$$\bar{m}_c(\bar{F}) = \bar{r}\,\bar{F} = \bar{r}\,m\bar{a} \qquad (1)$$

$\bar{m}_c(\bar{F})$ всегда перпендикулярны плоскости Δ ADC и направлен таким образом, чтобы, наблюдая с конца его вектора, поворот под действием силы осуществлялся против хода часовой стрелки.

Определим также момент количества движения материальной точки А относительно центра С по формуле:

$$\bar{k}_c = \bar{r}\,\bar{q} = \bar{r}\,m\bar{\upsilon} \qquad (2)$$

Вектор $\bar{k}_c$ перпендикулярен плоскости Δ ABC.

Чтобы установить зависимость между моментом количества движения материальной точки $\bar{k}_c$ и моментом силы $\bar{m}_c(\bar{F})$, следует продифференцировать выражение (2) по времени:

$$\frac{d\bar{k}_c}{dt} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{\upsilon}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{\upsilon}}{dt}\right),$$

Здесь $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\upsilon}$; $\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \bar{a}$.

Пользуясь этими выражениями, получаем

$$\frac{d\bar{k}_c}{dt} = (\bar{\upsilon} \times m\bar{\upsilon}) + (\bar{r} \times m\bar{a})$$

Так как угол $(\bar{\upsilon}; m\bar{\upsilon}) = 0$, то тогда

$$\frac{d\bar{k}_c}{dt} = \bar{r} \times m\bar{a} \tag{3}$$

Сравнивая (1) и (3), будем иметь $\frac{d\bar{k}_c}{dt} = \bar{m}_c(\bar{F})$, но если на материальную точку действует несколько сил, то $\bar{m}_c(\bar{F})$ следует рассматривать как момент их равнодействующей. Заменим $\bar{m}_c(\bar{F})$ геометрической суммой моментов составляющих сил:

$$\bar{m}_c(\bar{F}) = \sum \bar{m}_c$$

Следовательно

$$\frac{d\bar{k}_c}{dt} = \sum \bar{m}_c(\bar{F}_i) \tag{4}$$

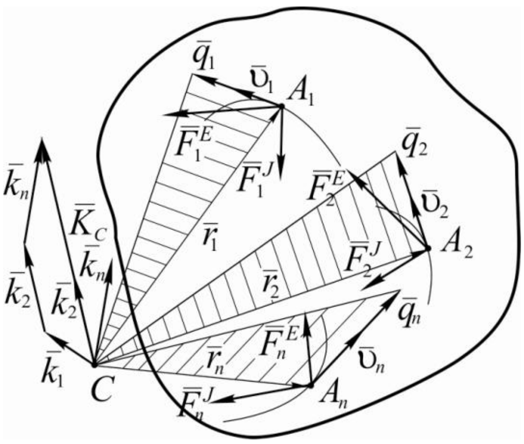
что и требовалось доказать.

Так как проекция векторной производной на любую ось равна производной от ее проекции на ту же ось, то, проектируя векторное равенство (4) на оси *x*, *y*, *z*, получим три равенства:

$$\frac{dk_x}{dt} = \sum m_x(\bar{F}_i); \quad \frac{dk_y}{dt} = \sum m_y(\bar{F}_i); \quad \frac{dk_z}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_i)$$

6.4. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.

Положим, что система материальных точек A_1, A_2, …, A_n, движется под действием некоторой системы сил, которые разделим на внешние силы $\bar{F}_1^E$, $\bar{F}_2^E$, …, $\bar{F}_n^E$ и внутренние силы $\bar{F}_1^J$, $\bar{F}_2^J$, …, $\bar{F}_n^J$.



Выберем некоторый неподвижный центр С и определим изменение момента количества движения каждой точки относительно этого центра по уравнениям:

$$
+\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\overline{K}_{C_1}}{\mathrm{d}t}=\overline{m}_C\left(\overline{F}_1^E\right)+\overline{m}_C\left(\overline{F}_1^J\right)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dfrac{\mathrm{d}\overline{K}_{C_n}}{\mathrm{d}t}=\overline{m}_C\left(\overline{F}_n^E\right)+\overline{m}_C\left(\overline{F}_n^J\right)
\end{cases}
$$

$$
\sum\frac{\mathrm{d}\overline{K}_{C_n}}{\mathrm{d}t}=\sum\overline{m}_C\left(\overline{F}_i^E\right)+\sum\overline{m}_C\left(\overline{F}_i^J\right),
$$

из свойства внутренних сил имеем $\sum\overline{m}_C\left(\overline{F}_i^J\right)=0$

Тогда

$$
\frac{d\overline{K}_{C_i}}{dt}=\sum\overline{m}_C\left(\overline{F}_i^E\right) \tag{1}
$$

Векторная производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого центра равна геометрической сумме (главному моменту) моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно данного центра.

В проекциях на координатные оси эта теорема запишется следующим образом:

$$
\frac{\mathrm{d}K_x}{\mathrm{d}t}=\sum m_x\left(\overline{F}_i^E\right);\ \frac{\mathrm{d}K_y}{\mathrm{d}t}=\sum m_y\left(\overline{F}_i^E\right);\ \frac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}t}=\sum m_z\left(\overline{F}_i^E\right) \tag{2}
$$

6.5. Закон сохранения кинетического момента механической системы. (следствие из теоремы)

Если геометрическая сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительного некоторого центра, равна 0, то кинетический момент системы относительно этого центра есть величина постоянная.

$$
\frac{d\overline{K}_C}{dt}=\sum\overline{m}_C\left(\overline{F}_i^E\right).
$$

Если $\sum\overline{m}_C\left(\overline{F}_i^E\right)=0$, то $\dfrac{d\overline{K}_C}{dt}=0$, следовательно $\overline{K}_C=const$.

Кроме того, если $\overline{K}_{C_0}=0$, то и в дальнейшем $\overline{K}_C=0$.

Если алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительного некоторой оси, равна 0, то кинетический момент системы относительно этой оси есть величина постоянная.

$$
\frac{\mathrm{d}K_x}{\mathrm{d}t}=\sum m_x\left(\overline{F}_i^E\right)
$$

Если $\sum m_x\left(\overline{F}_i^E\right)=0$, то $\dfrac{\mathrm{d}K_x}{\mathrm{d}t}=0$, следовательно $\overline{K}_x=const$.

Кроме того, если $\overline{K}_{x_0}=0$, то и в дальнейшем $\overline{K}_x=0$.

Из доказанной теоремы видно, что $\bar{K}_C$ может изменяться только под действием внешних сил, приложенных к системе. Под действием внутренних сил системы могут изменяться только $\bar{k}$ (кинетический момент материальной точки).

Вопросы для самоконтроля

1) Как определяются моменты количества движения материальной точки относительно центра?
2) Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра?
3) Что называют кинетическим моментом механической системы относительно центра?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

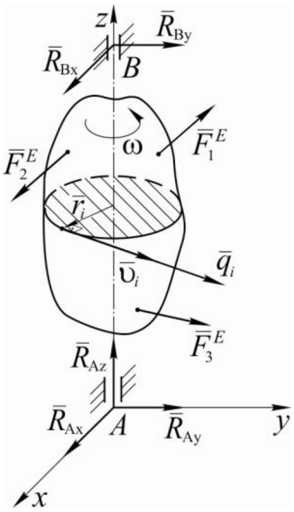
1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 7

Динамика вращательного движения твердого тела.

7.1. Момент инерции твердого тела относительно оси.

Пусть тело вращается под действием сил силы $\overline{F}_1^E$, $\overline{F}_2^E$, …, $\overline{F}_n^E$. Рассмотрим произвольную точку М.



$$\upsilon_i = r_i\,\omega$$

Количество движения этой точки $\overline{q}_i = m_i \overline{\upsilon}_i = m_i\,\overline{r}_i\,\omega$

Запишем момент количества движения этой точки относительно оси вращения z:

$$k_{iz} = m_i \upsilon_i\, r_i = m_i\,\omega\, r_i^2 = \omega\, J_z$$

Запишем кинетический момент твердого тела относительно оси z

$$K_z = \sum k_{iz} = \omega \sum m_i\; r_i^2 = \omega\, J_z,$$

где $J_z = \sum m_i\, r_i^2$ – момент инерции твердого тела относительно оси z (динамический момент инерции).

Моментом инерции твердого тела относительно оси называется особая скалярная величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек этого тела на квадрат их расстояния до оси (точки).

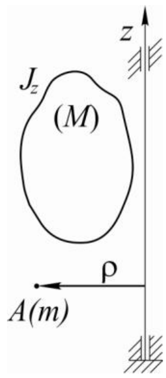
Момент инерции точечной массы определяют по формуле:

$$J_z = m r^2$$

где m – масса точки, r – расстояние от точки до оси вращения.
Размерность:
$J_z = m r^2 \; [кг \cdot м^2]$ – в системе СИ

7.2. Радиус инерции.

Пусть M – масса тела, J_z – его момент инерции.



Тогда радиус инерции определится из формулы:

$$J_z = M\rho^2 \text{, то есть } \rho = \sqrt{\frac{J_z}{M}}$$

Радиусом инерции твердого тела относительно некоторой оси называется то расстояние от этой оси, на котором необходимо поместить материальную точку, обладающую массой всего тела, так, чтобы момент инерции этой точечной массы относительно данной оси был равен моменту инерции твердого тела относительно этой же оси.

7.3. Дифференциальные уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Запишем кинетический момент твердого тела относительно оси вращения

$$K_z = \omega J_z,$$

то есть кинетический момент вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси его вращения равен произведению угловой скорости тела на момент инерции тела относительно той же оси.

Рассмотрим изменение кинетического момента тела относительно оси z под действием приложенных к нему задаваемых внешних сил $\overline{F}_1^E$, $\overline{F}_2^E$, …, $\overline{F}_n^E$. Теорема об изменении кинетического момента механической системы выражается:

$$\frac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}t} = \sum m_z\left(\overline{F}_i^E\right) \tag{1}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\left(\omega J_z\right)}{\mathrm{d}t} = \sum m_z\left(\overline{F}_i^E\right)$$

Реакции подшипника B и подпятника A являются внешними силами, но при отсутствия трения их моменты равны нулю, и правая часть уравнения (1) содержит только сумму моментов задаваемых внешних сил. При наличии трения эта сумма содержит также момент сил трения.

Так как

$$J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum m_z\left(\overline{F}_i^E\right) \tag{2}$$

$$J_z\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum m_z\left(\overline{F}_i^E\right) \tag{3}$$

Выражения (2) и (3) представляют собой дифференциальные уравнения соответственно 1-го и 2-го порядка.

Если сравнить дифференциальные уравнения (2) и (3) с дифференциальным уравнением для поступательного прямолинейного движения тела:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X_C}{\mathrm{d}t^2} = \sum X_i^E ,$$

где X_C – координата центра масс.

Очевидно, что момент инерции J_z при вращательном движении твердого тела имеет такое же значение, какое имеет масса тела при его поступательном движении.

Следовательно, момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении.

Из анализа дифференциальных уравнений (2), (3) вращательного движения можно заключить:

1. Если $\sum m_z(F_i^E) > 0$, то $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \varepsilon > 0$ – тело вращается ускоренно;

2. Если $\sum m_z(F_i^E) < 0$, то $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \varepsilon < 0$ – тело вращается замедленно;

3. Если $\sum m_z(F_i^E) = 0$, то $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \varepsilon = 0$, тогда $\omega = const$, т. е. вращение тела равномерное (по инерции).

7.4. Сохранение кинетического момента вращающейся системы.

Напишем дифференциальное уравнение вращательного движения:

$$J_z\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum m_z(F_i^E)$$

или

$$J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum m_z(F_i^E).$$

Если $\sum m_z(F_i^E) = 0$, то $\frac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}t} = 0$, следовательно, $K_z = \omega J_z = const$.

Так как $J_z = const$, то $\omega = const$, т. е. твердое тело вращается равномерно (по инерции).

Но если отдельные элементы вращающейся системы в процессе вращения изменяют свое положение по отношению к неизменяемой оси вращения, то изменяется величина момента инерции системы J_z относительно этой оси.

Тогда, при $K_z = const$, изменяется угловая скорость вращения системы ω.

Т. е., при $\sum m_z(F_i^E) = 0$, получим

$$K_z = \omega_1 J_{1z} = \omega_2 J_{2z} = const , \tag{1}$$

где J_{1z}, J_{2z} – моменты инерции вращающейся системы в двух разных положениях ее элементов;

ω_1, ω_2 – угловые скорости вращения системы, соответствующие значениям J_{1z}, J_{2z}.

Из (1) можно получить

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{J_{2z}}{J_{1z}} \tag{2}$$

т. е., при увеличении момента инерции системы, угловая скорость ее вращения уменьшается и наоборот.

7.5. Теорема о моменте инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса- Штейнера).

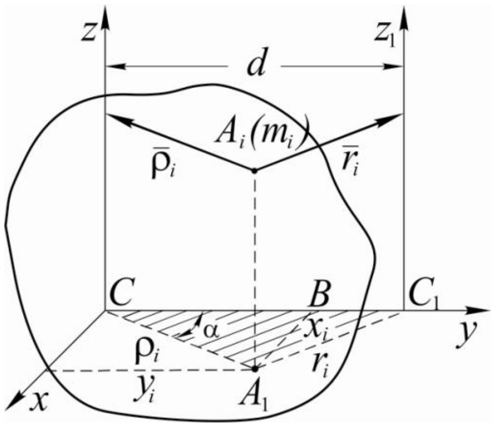
т. С – центр массы тела. Ось $z \parallel z_1$. Ось z – центральная ось (проходит через центр масс тела).

$$J_z = \sum m_i \rho_i^2, \;\; J_{z_1} = \sum m_i \rho_i^2$$

Из Δ CA_1C_1 по теореме косинусов:

$$r_i^2 = d^2 + \rho_i^2 - 2d\,\rho_i \cos\alpha$$

Из Δ CA_1B: $\cos\alpha = \dfrac{y_i}{\rho_i}$, тогда $r_i^2 = d^2 + \rho_i^2 - 2d\,\rho_i \dfrac{y_i}{\rho_i}$



$$J_{z_1} = \sum m_i \left(d^2 + \rho_i^2 - 2d\,y_i\right) = \sum m_i d^2 + \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i y_i\,,$$

$$\sum m_i y_i = 0\,, \;\; y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \text{ т. к. } \; y_C = 0,\; M \neq 0,\; \sum m_i y_i = 0\,.$$

Следовательно:

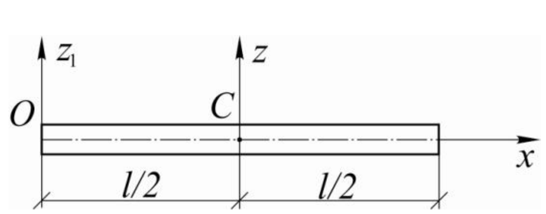
$$J_{z_1} = \sum m_i \rho_i^2 + d^2 \sum m_i = J_z + M$$

$$J_{z_1} = J_z + M\,d^2$$

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Моменты инерции некоторых тел:

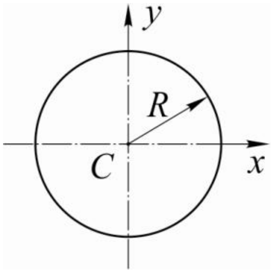
1) Однородный тонкий прямолинейный стержень.



$$J_{C_z} = \frac{m l^2}{12},$$

$$J_{C_{z_1}} = \frac{m l^2}{3}$$

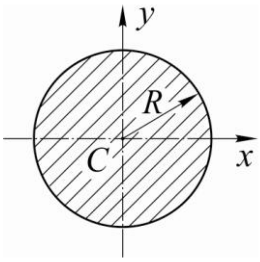
2) Однородное тонкое круглое кольцо;



$$J_C = mR^2$$

$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{2}$$

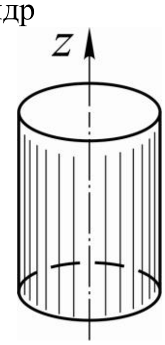
3) Однородный круглый тонкий диск;



$$J_C = \frac{mR^2}{2}$$

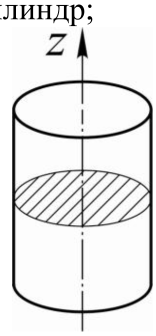
$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{4}$$

4) Полный цилиндр



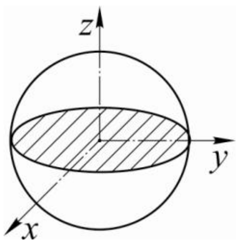
$$J_z = mR^2$$

5) Сплошной цилиндр;



$$J_z = \frac{mR^2}{2}$$

6) Шар.



$$J_{x,y,z} = \frac{2}{5}mR^2$$

$$J_C = \frac{3}{5}mR^2$$

Вопросы для самоконтроля

1) Что называют моментом инерции твердого тела относительно оси?
2) Какую величину называют радиусом инерции тела относительно оси?
3) Как определяются моменты количества движения материальной точки относительно оси?
4) Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси?
5) Что называют кинетическим моментом механической системы относительно оси?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

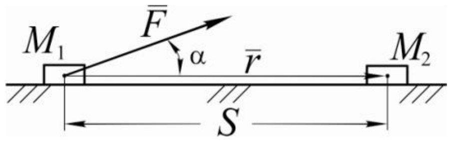
Лекция 8

Работа и мощность.

Работой силы называется особая скалярная величина, являющаяся мерой действия силы при преобразовании механического движения в другие формы движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты, электричества и т. д.).

8.1. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении.

$$A = F\,S\cos\alpha \tag{1}$$



Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении равна произведению модуля силы на перемещение точки ее приложения и на косинус угла между ними.

Могут встречаться следующие частные случаи:

1) Если $\alpha = 0$, $\left(\overline{F} \uparrow\uparrow \overline{S}\right)$, тогда $A = F\,S$;
2) Если $\alpha = 90^\circ$, $\left(\overline{F} \perp \overline{S}\right)$, тогда $A = 0$;
3) Если $\alpha = 180^\circ$, $\left(\overline{F} \uparrow\downarrow \overline{S}\right)$, тогда $A = -F\,S$

Таким образом, работа силы может быть как положительной, так и отрицательной.

Рассмотрим скалярное произведение 2-х векторов:

$$\overline{F}\,\overline{r} = F\,r\cos\alpha \tag{2}$$

Сравним выражения (1) и (2) между собой:

$$A = \overline{F}\,\overline{r}$$

То есть работа постоянной силы на прямолинейном перемещении равна скалярному произведению вектора силы на вектор точки ее приложения.

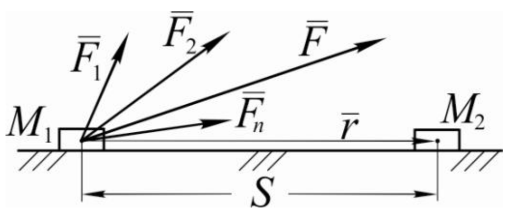
Размерность работы силы:

$$A = F\,S\cos\alpha \quad [\text{Н м}] = \left[\frac{\text{кг м}}{\text{с}^2}\,\text{м}\right] = [\text{Дж}]$$ – в системе СИ

8.2. Теорема о работе равнодействующей силы.

Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ слагаемых сил на том же перемещении.

Пусть точка (тело) переместилось под действием сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, …, $\overline{F}_n$, из положения M_1 в положение M_2.

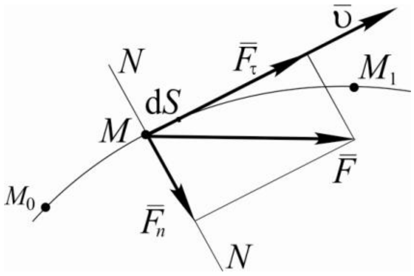


$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n \;;\; \overline{F}\,\overline{r}=\overline{F}_1\,\overline{r}+\overline{F}_2\,\overline{r}+\ldots+\overline{F}_n\,\overline{r}$$

$$A=A_1+A_2+\ldots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i$$

8.3. Работа переменной силы.

Пусть т. M переместилась под действием силы $F\neq const$ из положения M_1 в положение M_2. Разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}_n$ и $\overline{F}_\tau$. Дугу M_1M_2 разобьем на элементарные дуги $\mathrm{d}S$.



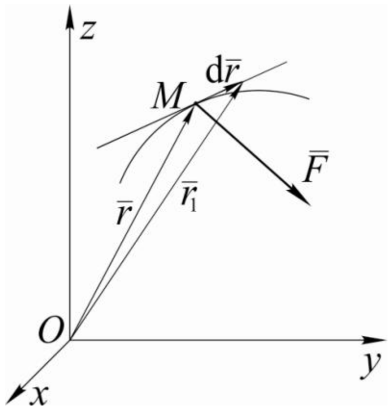
Тогда элементарная работа при естественном способе задания движения точки будет равна

$$\mathrm{d}A=F\,\mathrm{d}S\cos(\overline{F};\overline{\upsilon})$$

или

$$\mathrm{d}A=F_\tau\,\mathrm{d}S \tag{1}$$

Элементарную работу при векторном способе задания можно выражать как скалярное произведение:



$$\mathrm{d}A=\overline{F}\,\mathrm{d}\overline{r}\,, \tag{2}$$

где $\mathrm{d}\overline{r}$ – вектор элементарного перемещения т. M.

Если обозначить проекции силы $\overline{F}$ на координатные оси через x, y, z, а проекции вектора $\mathrm{d}\overline{r}$ на оси через $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, то получим скалярное произведение векторов $\overline{F}$ и $\mathrm{d}\overline{r}$ в виде

$$\mathrm{d}A=X\,\mathrm{d}x+Y\,\mathrm{d}y+Z\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

Формула (3) дает выражение элементарной работы через проекции силы на оси координат.

Работа силы на конечном перемещении равна сумме ее элементарных работ

$$A=\sum \mathrm{d}A$$

Пользуясь выражениями (1), (2) и (3) переходя к пределу, при стремлении числа элементарных участков к ∞, получим следующие выражения работы силы $\bar{F}$ на конечном перемещении M_1M_2.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F\,\mathrm{d}S \cos(\bar{F};\bar{\upsilon})$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_\tau\,\mathrm{d}S\ ,\ A = \int_{M_1}^{M_2} \bar{F}\,\mathrm{d}\bar{r}$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z)$$

Работа переменной силы на некотором перемещении выражается криволинейным интегралом от элементарной работы этой силы, взятым вдоль перемещения в соответствующих пределах.

Работу переменной силы можно подсчитывать аналитически и определять экспериментально с помощью специальной измерительной аппаратуры.

8.4. Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу.

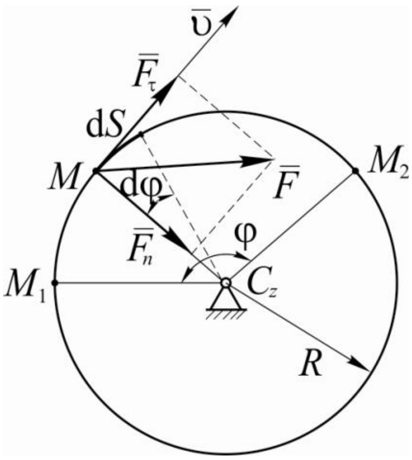
Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси $C_z \perp$ плоскости рисунка из положения M_1 в положение M_2 под действием силы $\bar{F}$.

Элементарная работа этой силы $\mathrm{d}A = F_\tau\,\mathrm{d}S$, но $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\varphi$, тогда

$$\mathrm{d}A = F_\tau\,R\,\mathrm{d}\varphi$$

или

$$\mathrm{d}A = M_C\,\mathrm{d}\varphi,$$



т. е. ***элементарная работа силы во вращательном движении равна*** произведению момента этой силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота. При этом, если на тело действует несколько сил, то

$$M_C = \sum m_C(\bar{F}_i)$$

Если тело поворачивается на конечный угол, то

$$A = \int_0^\varphi M_C\,\mathrm{d}\varphi$$

В частности, если момент силы относительно оси вращения постоянный, то

$$A = M_C\,\varphi,$$

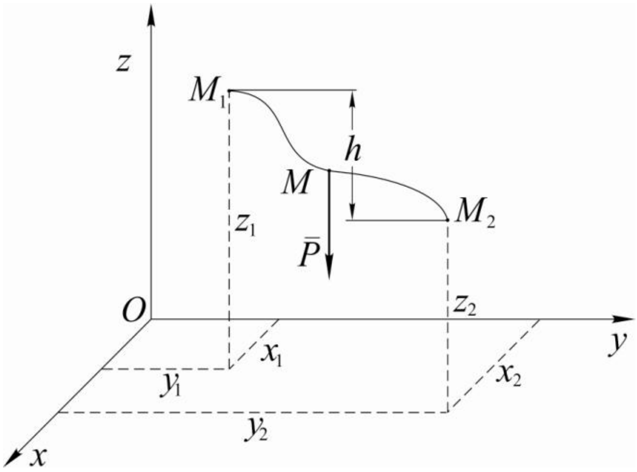
где φ – в радианах.

8.5. Работа силы тяжести.

$P = mg$ – сила тяжести. Вычислим работу этой силы по формуле:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z),$$

где: X, Y, Z –проекции силы P на координатные оси. Очевидно, что X=0, Y=0, а $Z = -P$



Тогда

$$A = \int_{z_1}^{z_2} -P\,\mathrm{d}z = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2) = P\,h$$

Т. о.

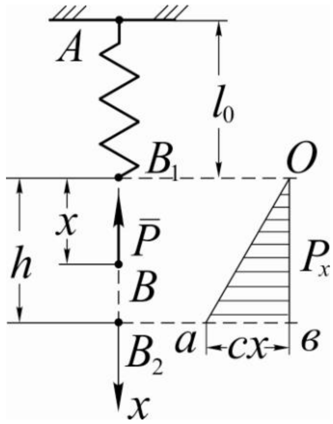
$$A = \pm P\,h$$

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории точки и точки приложения этой силы и равна взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки приложения этой силы.

В этом случае работа силы тяжести считается положительной, если тело движется вниз и отрицательной, если – вверх.

8.6. Работа силы упругости.

B_1 – начало координат. Направим ось x по оси пружины. Тогда проекция силы упругости на эту ось $P_x = -c\,x$, где c-коэффициент жесткости пружины.



Вычислим работу этой силы

$$A = \int_{B_1}^{B_2} (X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z)$$

Очевидно, что Y=0,Z=0, а $X = -c\,x$.
Тогда

$$A = -c\int_0^h x\,\mathrm{d}x = -\frac{c\,h^2}{2}$$

$$A = \pm\frac{c\,h^2}{2} \tag{1}$$

Работа силы упругости отрицательна, если деформация увеличивается, и положительна, если – уменьшается.

Если начальная деформация пружины не равна 0, а равна x_0, то работа силы упругости на дополнительной деформации (x_1-x_0) равна:

$$A = -c\int_{x_0}^{x_1} x\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2)$$

$$A = \pm\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2) \tag{2}$$

Полученные формулы (1) и (2) справедливы лишь для тех случаев, когда справедлив закон Гука.

8.7. Мощность силы.

Мощность силы есть особая скалярная величина, характеризующая быстроту изменения работы в единицу времени.

Пусть сила совершает работу A за время t. Тогда средняя мощность определяется по формуле:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{t}$$

Мгновенная мощность или мощность силы в данный момент будет равна отношению элементарной работы к элементарному промежутку времени, т. е.:

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

Размерность:

$N = \dfrac{A}{t}\left[\dfrac{\text{Дж}}{\text{с}}\right] = [\text{Вт}]$ – в системе СИ

1 л.с.=75 $\frac{\text{кГ}\cdot\text{м}}{\text{с}}$=736 Вт   1 кВт=1,36 л.с.

Вопросы для самоконтроля

1) Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?
2) Каким способом можно вычислить работу постоянной по модулю и направлению силы на криволинейном перемещении?
3) Чему равна работа равнодействующей силы?
4) Как вычисляется работа силы тяжести и работа силы упругости?
5) Как вычисляется мощность силы?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 9

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.

Кинетическая энергия есть особая скалярная величина, являющаяся мерой механического движения при его преобразовании в другие формы движения материи.

Различают кинетическую энергию материальной точки и механической системы.

Кинетическая энергия материальной точки есть скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, т.е.

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, образующих систему, т. е.

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}$$

Размерность:

$T = \frac{m\upsilon^2}{2}$ $[\text{Дж}]$ – в системе СИ

Кинетическая энергия и работа силы соизмеримые величины.

9.1. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Пусть т. M движется по некоторой траектории под действием силы $\overline{F}$. M_1 –ее начальное, M_2 –конечное положения. Основное уравнение динамики $m\overline{a} = \overline{F}$ спроектируем на касательную к траектории $m a_\tau = F_\tau$

Из кинематики известно, что $a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$.

Следовательно:

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = F_\tau \qquad (1)$$

Умножим правую и левую части уравнения (1) на dS:

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S = F_\tau\,\mathrm{d}S \qquad (2)$$

$$m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = F_\tau\,\mathrm{d}S$$

или

$$m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = \mathrm{d}A$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \mathrm{d}A \qquad (3)$$

уравнение (3) представляет собой теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме.

Теорема: «*Дифференциал кинетической энергии движущейся материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку*».

Проинтегрируем уравнение (3):

$$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \int_{M_1}^{M_2} \mathrm{d}A\,; \quad \left.\frac{m\upsilon^2}{2}\right| = A$$

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A$$

Если на точку действует несколько сил, то

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \sum A_i \tag{4}$$

уравнение (4) представляет собой теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме.

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил, на том же перемещении.

9.2. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Запишем для каждой точки системы теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$+\begin{cases} \mathrm{d}\left(\dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2}\right) = \mathrm{d}A_1^E + \mathrm{d}A_1^J \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{d}\left(\dfrac{m_n\upsilon_n^2}{2}\right) = \mathrm{d}A_n^E + \mathrm{d}A_n^J \end{cases}$$

$$\sum \mathrm{d}\left(\frac{m_i\upsilon_i^2}{2}\right) = \sum \mathrm{d}A_i^E + \sum \mathrm{d}A_i^J$$

$$\mathrm{d}\sum \frac{m_i\upsilon_i^2}{2} = \sum \mathrm{d}A_i^E + \sum \mathrm{d}A_i^J$$

$$\mathrm{d}T = \sum \mathrm{d}A_i^E + \sum \mathrm{d}A_i^J$$

теорема в дифференциальной форме.

Теорема: «*Дифференциал кинетической энергии движущейся механической системы равен алгебраической сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему*».

Проинтегрируем последнее выражение:

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T = \sum \int_{M_1}^{M_2} \mathrm{d}A_i^E + \sum \int_{M_1}^{M_2} \mathrm{d}A_i^J \,.$$

Получим:

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^J$$

– теорема в дифференциальной форме.

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему на том же перемещении.

В случае движения твердого тела $\sum A_i^J = 0$, тогда

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E$$

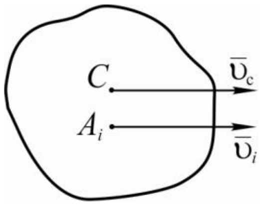
– теорема для твердого тела.

Изменение кинетической энергии твердого тела на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на тело внешних сил на том же перемещении.

9.3. Кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения.

1) ***Поступательное движение.***

В этом случае все точки твердого тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения Ц. М. То есть для любой точки $\upsilon_i = \upsilon_c$.



Тогда

$$T = \sum \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \upsilon_C^2}{2} = \frac{\upsilon_C^2}{2} \sum m_i = \frac{M \upsilon_C^2}{2}$$

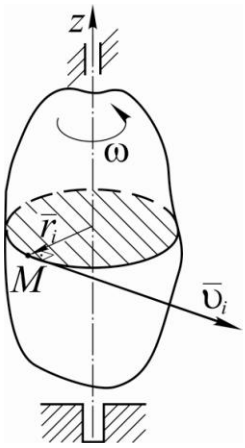
Т. е.

$$T = \frac{M \upsilon_C^2}{2}$$

Кинетическая энергия твердого тела, при поступательном его движении, равна половине произведения массы всего тела на квадрат скорости его Ц. М.

2) ***Вращательное движение.***

Т. к. $\upsilon_i = r_i\, \omega$, то



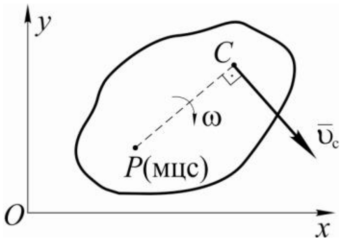
$$T = \sum \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum \frac{m_i\, \omega_i^2\, r_i^2}{2} = \frac{\omega_i^2}{2} \sum m_i\, r_i^2 = \frac{J_z\, \omega^2}{2}$$

$$T = \frac{J_z\, \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела равна половине произведения момента инерции этого тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости.

3) Плоское движение.

Из кинематики известно, что плоское движение можно рассматривать как мгновенно вращательное вокруг М. Ц. С.



Тогда $T = \frac{1}{2} J_P \, \omega^2$

По теореме Штейнера

$$J_P = J_C + M|PC|^2,$$

где J_C – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через Ц. М. т. $C \perp$ плоскости рисунка.

Также известно, что $\upsilon_C = |PC|\,\omega$, тогда

$$T = \frac{1}{2}\left(J_P + M\,|PC|^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M\,\omega^2 |PC|^2 = \frac{J_C\,\omega^2}{2} + \frac{M\,\upsilon_C^2}{2}$$

$$T = \frac{J_C\,\omega^2}{2} + \frac{M\,\upsilon_C^2}{2}$$

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего плоское движение, равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью Ц. М., сложенному с кинетической энергией вращательного движения вокруг Ц. М.

Вопросы для самоконтроля

1) Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.
2) Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении.
3) Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения?
4) Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Бать, М.И., Джанелидзе, Г.Ю., Кельзон, А.С.** Теоретическая механика в примерах и задачах. – 9-е изд., стер. / Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. – СПб.: Лань, 2010 г.
2. **Бутенин, Н.В., Лунц, Я.Л., Меркин, Д.Р.** Курс теоретической механики: учебник / Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. – СПб.: Лань, 2008 г.
3. **Лачуга, Ю.Ф., Ксендзов, В.А.** Теоретическая механика: учебник / Лачуга Ю.Ф., Ксендзов В.А. – М.: Колос, 2000 г.
4. **Никитин, Н.Н.** Курс теоретической механики: учебник / Никитин Н.Н. – М.: Высшая школа, 2003 г.
5. **Тарг С.М.** Краткий курс теоретической механики: учебник / Тарг С.М. – М.: Высшая школа, 1998 г.
6. **Яблонский, А.А., Никифорова, В.М.** Курс теоретической механики: учебник для вузов. – изд. 12-е, исправленное / Яблонский А.А., Никифорова В.М. – М.: Интеграл-Пресс, 2006 г.

СОДЕРЖАНИЕ