**Министерство сельского хозяйства Российской федерации**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Саратовский государственный аграрный университет имени Н.И. Вавилова»**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССОВ

**краткий курс лекций**

**для студентов II курса**

направления подготовки
**27.04.01 «Стандартизация и метрология»**

профиль подготовки
**Организационно-управленческие системы**

**Саратов 2016**

УДК 62
ББК 30
Г 62

Рецензенты:
Доцент кафедры «Менеджмент качества» к.т.н., ФГБОУ ВО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова
*О.А. Голубенко*
Исполнительный директор ЗАО «ИнтерСтандарт»
*Б.М. Яишницын*

Г62 **Моделирование и идентификация процессов**: Краткий курс лекций для студентов 2 курса направления подготовки 27.04.01 «Стандартизация и метрология»/Сост. Н.В. Коник; ФГБОУ ВО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2016. 51с.

Краткий курс лекций по дисциплине «Моделирование и идентификация процессов» составлен в соответствие с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки 27.04.01 «Стандартизация и метрология». Краткий курс лекций раскрывает основное содержание и особенности моделирования и идентификации процессов в современной организации.

УДК 62
ББК 30

## Введение

Для успешного осуществления управленческой деятельности необходимо составить четкое представление о структуре организации, взаимодействии ее составных частей и связях организации с внешней средой.

Существующие в настоящее время организации отличаются огромным разнообразием как по направлениям деятельности, так и по форме собственности, масштабам, другим параметрам. При этом каждая организация по-своему уникальна. Однако для управления всеми организациями применяются одинаковые принципы, методы и способы. Чтобы приспособить их к особенностям конкретного предприятия, четко определить место управляющих структур в общей структуре предприятия, а также их взаимодействие между собой и с другими подразделениями, широко применяется моделирование. Поэтому изучение моделирования в управленческой деятельности является актуальной проблемой.

Основное назначение данного конспекта лекций заключается в том, чтобы дать изложение содержания курса «Моделирование и идентификация процессов», позволяющего приобрести умения в выявлении и формулировании проблем организаций, в структурировании проблемного поля, в поиске решений главных проблем, реализация которых определяет стратегическое развитие организаций.

Краткий курс лекций составлен в соответствие с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки 27.04.01 «Стандартизация и метрология».

**Лекция 1**

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О МОДЕЛЯХ И МЕТОДАХ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется объектом. Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью.

При построении математической модели реальное явление упрощается, схематизируется и полученная схема описывается в зависимости от сложности явлений с помощью того или иного математического аппарата.

От правильности учета в модели характерных черт рассматриваемого процесса зависят успех исследования и ценность полученных результатов моделирования.

В модели должны быть учтены все наиболее существенные факторы, влияющие на процесс, и вместе с тем она не должна быть загромождена множеством мелких, второстепенных факторов, учет которых только усложнит математический анализ и сделает исследование либо чрезмерно громоздким, либо вообще нереализуемым.

Метод математического моделирования применяют при изучении свойств процессов, для которых имеется достаточно точное математическое описание. В зависимости от степени полноты математического описания можно выделить два предельных случая: а) известны полная система уравнений, описывающая все основные стороны моделируемого процесса, и все числовые значения параметров этих уравнений; б) полное математическое описание процесса отсутствует. Этот второй случай типичен для решения кибернетических задач, в которых приходится иметь дело с управлением процессами при наличии неполной информации об объекте и действующих на него возмущениях. При отсутствии достаточной информации об исследуемых явлениях их изучение начинается с построения простейших моделей, но без нарушения основной специфики исследуемого процесса.

Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

Обобщенно моделирование можно определить как метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект-оригинал находится в некотором соответствии с другим объектом-моделью, причем модель способна в том или ином отношении замещать оригинал на некоторых стадиях познавательного процесса. Стадии познания, на которых происходит такая замена, а также формы соответствия модели и оригинала могут быть различными:

1) моделирование как познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешней среды, о происходящих в ней явлениях, в результате чего в сознании появляются образы, соответствующие объектам;

2) моделирование, заключающееся в построении некоторой системы-модели, связанной определенными соотношениями подобия с системой-оригиналом, причем в этом случае отображение одной системы в другую является средством выявления зависимостей между двумя системами, отраженными в соотношениях подобия, а не результатом непосредственного изучения поступающей информации.

Следует отметить, что с точки зрения философии моделирование - эффективное средство познания природы. Процесс моделирования предполагает наличие объекта исследования; исследователя, перед которым поставлена конкретная задача; модели, создаваемой для получения информации об объекте и необходимой для решения поставленной задачи. Причем по отношению к модели исследователь является, по сути дела, экспериментатором, только в данном случае эксперимент проводится не с реальным объектом, а с его моделью.

Надо иметь в виду, что любой эксперимент может иметь существенное значение в конкретной области науки только при специальной его обработке и обобщении. Единичный эксперимент никогда не может быть решающим для подтверждения гипотезы, проверки теории. Поэтому инженеры должны быть знакомы с элементами современной методологии теории познания и, в частности, не должны забывать основного положения материалистической философии, что именно экспериментальное исследование, опыт, практика являются критерием истины.

Моделирование начинается с формирования предмета исследований – системы понятий, отражающей существенные для моделирования характеристики объекта. Эта задача является достаточно сложной, что подтверждается различной интерпретацией в научно-технической литературе таких фундаментальных понятий, как система, модель, моделирование. Подобная неоднозначность не говорит об ошибочности одних и правильности других терминов, а отражает зависимость предмета исследований (моделирования) как от рассматриваемого объекта, так от целей исследователя. Отличительной особенностью моделирования сложных систем является его многофункциональность и многообразие способ использования; оно становится неотъемлемой частью всего жизненного цикла системы. Объясняется это в первую очередь технологичностью моделей, реализованных на базе средств вычислительной техники: достаточно высокой скоростью получения результатов моделирования и их сравнительно невысокой себестоимостью.

Принципы системного подхода в моделировании систем

В настоящее время при анализе и синтезе сложных (больших) систем получил развитие системный подход, который отличается от классического (или) индивидуального подхода. Последний рассматривает систему путем перехода от частного к общему и синтезирует (конструирует) систему путем слияния ее компонент, разрабатываемых раздельно. В отличие от этого системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель, причем исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Объект моделирования

Специалисты по проектированию и эксплуатации сложных систем имеют дело с системами управления различных уровней, обладающими общим свойством-стремлением достичь некоторой цели. Эту особенность учтем в следующих определениях системы. Система S-целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы. Внешняя среда E-множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием.

В зависимости от цели исследования могут рассматриваться разные соотношения между самим объектом S и внешней средой E. Таким образом, в зависимости от уровня, на котором находится наблюдатель, объект исследования может выделяться по-разному и могут иметь место различные взаимодействия этого объекта с внешней средой.

С развитием науки и техники сам объект непрерывно усложняется, и уже сейчас говорят об объекте исследования как о некоторой сложной системе, которая состоит из различных компонент, взаимосвязанных друг с другом. Поэтому, рассматривая системный подход как основу для построения больших систем и как базу создания методики их анализа и синтеза, прежде всего необходимо определить само понятие системного подхода.

Системный подход-это элемент учения об общих законах развития природы и одно из выражений диалектического учения. Можно привести разные определения системного подхода, но наиболее правильно то, которое позволяет оценить познавательную сущность этого подхода при таком методе исследования систем, как моделирование. Поэтому весьма важны выделение самой системы S и внешней среды E из объективно существующей реальности и описание системы исходя из общесистемных позиций.

При системном подходе к моделированию систем необходимо прежде всего четко определить цель моделирования. Поскольку невозможно полностью смоделировать реально функционирующую систему (систему-оригинал, или первую систему), создается модель (система-модель, или вторая система) под поставленную проблему. Таким образом, применительно к вопросам моделирования цель возникает из требуемых задач моделирования, что позволяет подойти к выбору критерия и оценить, какие элементы войдут в создаваемую модель M. Поэтому необходимо иметь критерий отбора отдельных элементов в создаваемую модель.

Подходы к исследованию систем

Важным для системного подхода является определение структуры системы-совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие. Структура системы может изучаться извне с точки зрения состава отдельных подсистем и отношений между ними, а также изнутри, когда анализируются отдельные свойства, позволяющие системе достигать заданной цели, т.е. когда изучаются функции системы. В соответствии с этим наметился ряд подходов к исследованию структуры системы с ее свойствами, к которым следует, прежде всего, отнести структурный и функциональный.

При структурном подходе выявляются состав выделенных элементов системы S и связи между ними. Совокупность элементов и связей между ними позволяет судить о структуре системы. Последняя в зависимости от цели исследования может быть описана на разных уровнях рассмотрения. Наиболее общее описание структуры - это топологическое описание, позволяющее определить в самых общих понятиях составные части системы и хорошо формализуемое на базе теории графов.

Менее общим является функциональное описание, когда рассматриваются отдельные функции, т.е. алгоритмы поведения системы, и реализуется функциональный подход, оценивающий функции, которые выполняет система, причем под функцией понимается свойство, приводящее к достижению цели. Поскольку функция отображает свойство, а свойство отображает взаимодействие S системы с внешней средой E, то свойства могут быть выражены в виде либо некоторых характеристик элементов Si(j) и подсистем Si системы, либо системы S в целом.

При наличии некоторого эталона сравнения можно ввести количественные и качественные характеристики систем. Для количественной характеристики вводятся числа, выражающие отношения между данной характеристикой и эталоном. Качественные характеристики системы находятся, например, с помощью метода экспертных оценок.

Проявление функций системы во времени S (t), т.е. функционирование системы, означает переход системы из одного состояния в другое, т.е. движение в пространстве состояний Z. При эксплуатации системы S весьма важно качество ее функционирования, определяемое показателем эффективности и являющееся значением критерия оценки эффективности. Существуют различные подходы к выбору критериев оценки эффективности. Система S может оцениваться либо совокупностью частных критериев, либо некоторым общим интегральным критерием.

Следует отметить, что создаваемая модель М с точки зрения системного подхода также является системой, т.е. S′= S′ (M), и может рассматриваться по отношению к внешней среде Е. Наиболее просты по представлению модели, в которых сохраняется прямая аналогия явления. Применяют также модели, в которых нет прямой аналогии, а сохраняются лишь законы и общие закономерности поведения элементов системы S. Правильное понимание взаимосвязей как внутри самой модели М, так и взаимодействия ее с внешней средой Е в значительной степени определяется тем, на каком уровне находится наблюдатель.

Простой подход к изучению взаимосвязей между отдельными частями модели предусматривает рассмотрение их как отражение связей между отдельными подсистемами объекта. Такой классический подход может быть использован при создании достаточно простых моделей. Реальный объект, подлежащий моделированию, разбивается на отдельные подсистемы, т.е. выбираются исходные данные Д для моделирования и ставятся цели Ц, отображающие отдельные стороны процесса моделирования. По отдельной совокупности исходных данных Д ставится цель моделирования отдельной стороны функционирования системы, на базе этой цели формируется некоторая компонента К будущей модели. Совокупность компонент объединяется в модель М.

Таким образом, разработка модели М на базе классического подхода означает суммирование отдельных компонент в единую модель, причем каждая из компонент решает свой собственные задачи и изолирована от других частей модели. Поэтому классический подход может быть использован для реализации сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального объекта. Для модели сложного объекта такая разобщенность решаемых задач недопустима, так как приводит к значительным затратам ресурсов при реализации модели на базе конкретных программно-технических средств. Можно отметить две отличительные стороны классического подхода: наблюдается движение от частного к общему, создаваемая модель (система) образуется путем суммирования отдельных ее компонент и не учитывается возникновение системного эффекта.

С усложнением объектов моделирования возникла необходимость наблюдения их с более высокого уровня. В этом случае наблюдатель (разработчик) рассматривает данную систему S как некоторую подсистему какой-то метасистемы, т.е. системы более высокого ранга, и вынужден перейти на позиции нового системного подхода, который позволит ему построить не только исследуемую систему, решающую совокупность задач, но и создавать систему, являющуюся составной частью метасистемы. Например, если ставится задача проектирования АСУ предприятием, то с позиции системного подхода нельзя забывать о том, что эта система является составной частью АСУ объединением.

Системный подход получил применение в системотехнике в связи с необходимостью исследования реальных систем, когда оказалась недостаточность, а иногда ошибочность принятия каких-либо частных решений. На возникновение системного подхода повлияли увеличивающееся количество исходных данных при разработке, необходимость учета сложных стохастических связей в системе и воздействий внешней среды Е. Все это заставило исследователей изучать сложный объект не изолированно, а во взаимодействии с внешней средой, а также в совокупности с другими системами некоторой метасистемы.

Системный подход позволяет решить проблему построения сложной системы с учетом всех факторов и возможностей, пропорциональных их значимости, на всех этапах исследования системы S и построения модели М. Системный подход означает, что каждая система S является интегрированным целым даже тогда, когда она состоит из отдельных разобщенных подсистем. Таким образом, в основе системного подхода лежит рассмотрение системы как интегрированного целого, причем это рассмотрение при разработке начинается с главного - формулировки цели функционирования. На основе исходных данных Д, которые известны из анализа внешней системы, тех ограничений, которые накладываются на систему сверху, либо исходя из возможностей ее реализации, и на основе цели функционирования формулируются исходные требования к модели Т системы S. На базе этих требований формируются ориентировочно некоторые подсистемы П, элементы Э и осуществляется наиболее сложный этап синтеза - выбор В составляющих системы, для чего используются специальные критерии выбора КВ.

При моделировании необходимо обеспечить максимальную эффективность модели системы. Эффективность обычно определяется как некоторая разность между какими-то показателями ценности результатов, полученных в итоге эксплуатации модели, и теми затратами, которые были вложены в ее разработку и создание.

Стадии разработки моделей

На базе системного подхода может быть предложена и некоторая последовательность разработки моделей, когда выделяют две основные стадии проектирования: макропроектирование и микропроектирование.

На стадии ***макропроектирования,*** на основе данных о реальной системе S и внешней среде Е строится модель внешней среды, выявляются ресурсы и ограничения для построения модели системы, выбирается модель системы и критерии, позволяющие оценить адекватность модели М реальной системы S. Построив модель системы и модель внешней среды, на основе критерия эффективности функционирования системы в процессе моделирования выбирают оптимальную стратегию управления, что позволяет реализовать возможности модели по воспроизведению отдельных сторон функционирования реальной системы S.

Стадия ***микропроектирования*** в значительной степени зависит от конкретного тира выбранной модели. В случае имитационной модели необходимо обеспечить создание информационного, технического и программного обеспечений системы моделирования. На этой стадии можно установить основные характеристики созданной модели, оценить время работы с ней и затраты ресурсов для получения заданного качества соответствия модели процессу функционирования системы S.

Независимо от типа используемой модели М при ее построении необходимо руководствоваться рядом принципов системного подхода:1) пропорционально-последовательное продвижение по этапам и направлениям модели; 2) согласование информационных, ресурсных, надежностных и других характеристик; 3)правильное соотношение отдельных уровней иерархии в системе моделирования; 4) целостность отдельных обособленных стадий построения модели.

Модель М должна отвечать заданной цели ее создания, поэтому отдельные части должны компоноваться взаимно, исходя из единой системной задачи. Цель может быть сформулирована качественно, тогда она будет обладать большей содержательностью и длительное время может отображать объективные возможности данной системы моделирования. При количественной формулировке цели возникает целевая функция, которая точно отображает наиболее существенные факторы, влияющие на достижение цели.

Построение модели относится к числу системных задач, при решении которых синтезируют решения на базе огромного числа исходных данных, на основе предложений больших коллективов специалистов. Использование системного подхода в этих условиях позволяет не только построить модель реального объекта, но и на базе этой модели выбрать необходимое количество управляющей информации в реальной системе, оценить показатели ее функционирования и тем самым на базе моделирования найти наиболее эффективный вариант построения и выгодный режим функционирования реальной системы S.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Каковы принципы системного подхода в моделировании систем?
2. Понятие объекта моделирования;
3. Какие еще существуют подходы к исследованию систем?
4. Перечислите стадии разработки моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Основная*


1. **Гроп Д.** Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
2. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
3. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. –М.: Финансы и статистика, 2006.
4. **Сейдж А., Мелса Дж.** Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.
5. **Советов Б.Я., Яковлев С.А.** Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## Лекция 2

## ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Под математическим моделированием понимают изучение свойств объекта на математической модели. Его целью является определение оптимальных условий протекания процесса, управление им на основе математической модели и перенос результатов на объект.

Основным понятием метода математического моделирования является понятие математической модели. Математической моделью называется приближенное описание какого-либо явления или процесса внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Математическое моделирование включает три взаимосвязанных этапа:

1) составление математического описания изучаемого объекта;

2) выбор метода решения системы уравнений математического описания и реализация его в форме моделирующей программы;

3) установление соответствия (адекватности) модели объекту.

На этапе составления математического описания предварительно выделяют основные явления и элементы в объекте и затем устанавливают связи между ними. Далее, для каждого выделенного элемента и явления записывают уравнение, отражающее его функционирование. Кроме того, в математическое описание включают уравнения связи между различными выделенными явлениями. В зависимости от процесса математическое описание может быть представлено в виде системы алгебраических, дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Этап выбора метода решения и разработки моделирующей программы подразумевает выбор наиболее эффективного метода решения из имеющихся (под эффективностью имеются в виду быстрота получения и точность решения) и реализацию его сначала в форме алгоритма решения, а затем – в форме программы, пригодной для расчета на ЭВМ.

Построенная на основе физических представлений модель должна верно качественно и количественно описывать свойства моделируемого процесса, т.е. она должна быть адекватна моделируемому процессу. Для проверки адекватности математической модели реальному процессу нужно сравнить результаты измерений на объекте в ходе процесса с результатами предсказания модели в идентичных условиях.

Этап установления адекватности модели является заключительным в последовательности этапов, выполняемых при ее разработке.

Исторически первым сложился аналитический подход к исследованию систем, когда ЭВМ использовалась в качестве вычислителя по аналитическим зависимостям. Анализ характеристик процессов функционирования больших систем с помощью только аналитических методов исследования наталкивается обычно на значительные трудности, приводящие к необходимости существенного упрощения моделей либо на этапе их построения, либо в процессе работы с моделью, что может привести к получению недостоверных результатов.

Поэтому в настоящее время наряду с построением аналитических моделей большое внимание уделяется задачам оценки характеристик больших систем на основе имитационных моделей, реализованных на современных ЭВМ с высоким быстродействием и большим объемом оперативной памяти. Причем перспективность имитационного моделирования как метода исследования характеристик процесса функционирования больших систем возрастает с повышением быстродействия и оперативной памяти ЭВМ, с развитием математического обеспечения, совершенствованием банков данных и периферийных устройств для организации диалоговых систем моделирования. Это в свою очередь, способствует появлению новых «чисто машинных» методов решения задач исследования больших систем на основе организации имитационных экспериментов с их моделями. Причем ориентация на автоматизированные рабочие места на базе персональных ЭВМ для реализации экспериментов с имитационными моделями больших систем позволяет проводить не только анализ их характеристик, но и решать задачи структурного, алгоритмического и параметрического синтеза таких систем при заданных критериях оценки эффективности и ограничениях.

Достигнутые успехи в использовании средств вычислительной техники для целей моделирования часто создаются иллюзию, что применение современной ЭВМ гарантирует возможность исследования системы любой сложности. При этом игнорируется тот факт, что в основу любой модели положено трудоемкое по затратам времени и материальных ресурсов предварительное изучение явлений, имеющих место в объекте-оригинале. И от того, насколько детально изучены реальные явления, насколько правильно проведена их формализация и алгоритмизация, зависит в конечном итоге успех моделирования конкретного объекта.

Математическое моделирование. Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы S математическими методами, включая и машинные, должна быть проведена формализация этого процесса, т.е. построена математическая модель.

При имитационном моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы S во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы S.

Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и др., которые часто создают трудности при аналитических исследованиях. В настоящее время имитационное моделирование - наиболее эффективный метод исследования больших систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее проектирования.

Когда результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели процесса функционирования системы S являются реализациями случайных величин и функций, тогда для нахождения характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение с последующей статистической обработкой информации и целесообразно в качестве метода машинной реализации имитационной модели использовать метод статистического моделирования. Первоначально был разработан метод статистических испытаний, представляющий собой численный метод, который применялся для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадали с решениями аналитических задач (такая процедура получила название метода Монте-Карло). Затем этот прием стали применять и для машинной имитации с целью исследования характеристик процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, т.е. появился метод статистического моделирования. Таким образом, методом статистического моделирования будем в дальнейшем называть метод машинной реализации имитационной модели, а методом статистических испытаний (Монте-Карло) - численный метод решения аналитической задачи.

Метод имитационного моделирования позволяет решать задачи анализа больших систем S, включая задачи оценки: вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния изменения различных параметров системы. Имитационное моделирование может быть положено также в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза больших систем, когда требуется создать систему, с заданными характеристиками при определенных ограничениях, которая является оптимальной по некоторым критериям оценки эффективности.

При решении задач машинного синтеза систем на основе их имитационных моделей помимо разработки моделирующих алгоритмов для анализа фиксированной системы необходимо также разработать алгоритмы поиска оптимального варианта системы. Далее в методологии машинного моделирования будем различать два основных раздела: статику и динамику, основным содержанием которых являются соответственно вопросы анализа и синтеза систем, заданных моделирующими алгоритмами.

Комбинированное (аналитико-имитационное) моделирование при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования. При построении комбинированных моделей проводится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы и для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся имитационные модели. Такой комбинированный подход позволяет охватить качественно новые классы систем, которые не могут быть исследованы с использованием только аналитического и имитационного моделирования в отдельности.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Что представляет собой математическое моделирование?
2. Виды математического моделирования.
3. Особенности различных видов математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Основная*

1. **Гроп Д.** Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
2. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
3. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. –М.: Финансы и статистика, 2006.
4. **Сейдж А., Мелса Дж.** Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.

5. **Советов Б.Я., Яковлев С.А.** Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## Лекция 3
## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Обеспечение имитационной системы включает в себя совокупность математических соотношений, описывающих поведение реального объекта, совокупность алгоритмов, обеспечивающих как подготовку, так и работу с моделью. Сюда могут быть отнесены алгоритмы ввода исходных данных, имитации, вывода, обработки.

Под математическим моделированием будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для аналитического моделирования характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т.п.) или логических условий.

Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик;

б) численным, когда, не умея решать уравнений в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных;

в) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

Наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными системы S. Однако такие зависимости удается получить только для сравнительно простых систем. При усложнении систем исследование их аналитическим методом наталкивается на значительные трудности, которые часто бывают непреодолимыми. Поэтому, желая использовать аналитический метод, в этом случае идут на существенное упрощение первоначальной модели, чтобы иметь возможность изучить хотя бы общие свойства системы. Такое исследование на упрощенной модели аналитическим методом помогает получить ориентировочные результаты для определения более точных оценок другими методами. Численный метод позволяет исследовать по сравнению с аналитическим методом более широкий класс систем, но при этом полученные решения носят честный характер. Численный метод особенно эффективен при использовании ЭВМ.

В отдельных случаях исследования системы могут удовлетворить и те выводы, которые можно сделать при использовании качественного метода анализа математической модели. Такие качественные методы широко используются, например, в теории автоматического управления для оценки эффективности различных вариантов систем управления.

В настоящее время распространены методы машинной реализации исследования характеристик процесса функционирования больших систем. Для реализации математической модели на ЭВМ необходимо построить соответствующий моделирующий алгоритм.

В зависимости от конкретной реализации процесса и его аппаратурного оформления все многообразие процессов можно разделить на четыре класса исходя из временного и пространственного признаков: процессы, переменные во времени (нестационарные), и процессы, не меняющиеся во времени (стационарные) ; процессы,в ходе которых их параметры изменяются в пространстве, и процессы без пространственного изменения параметров. Так как математические модели являются отражением соответствующих объектов, то для них характерны те же классы, а именно:

1) модели, неизменные во времени, — статические модели;

2) модели, переменные во времени, — динамические модели;

3) модели, неизменные в пространстве, — модели с сосредоточенными параметрами;

4) модели, изменяющиеся в пространстве, — модели с распределенными параметрами.

Рассмотрим перечисленные классы моделей.

*Модели с сосредоточенными параметрами.* Для данного класса моделей характерно постоянство переменных в пространстве. Математическое описание включает алгебраические уравнения либо дифференциальные уравнения первого порядка для нестационарных процессов. Примером объекта, оиисываемого данным классом моделей, может служить аппарат с идеальным (полным) перемешиванием потока. Скорость мешалки такова, что концентрация во всех точках аппарата одинакова.

*Модели с распределенными параметрами.* Если основные переменные процесса изменяются как во времени, так и в пространстве, или если указанные изменения происходят только в пространстве, то модели описывающие такие процессы, называются моделями с распределенными параметрами. Их математическое описание включает обычно дифференцдальные уравнения в частных производных, либо обыкновенные дифференциальные случас стационарных процессов с одной пространственной переменной. Примером нроцесса, описываемого такими моделями, служит трубчатый аппарат с болыним отношением длины к диаметру и значительной скоростью движения реагентов.

*Статические модели.* Статические модели отражают работу объекта в стационарных условиях, т.е. когда параметры процесса не меняются во времени. Соответственно математическое описание в статических моделях не включает время как переменную и состоит из алгебраических уравнений либо дифференциальных уравнений в случае объектов с распределен-ными параметрами.

*Динамические модели.* Динамическая модель отражает изменение объекта во времени. Математическое описание таких моделей обязательно включает производную по времени. Часто динамическую модель объекта строят в видс передаточных функций, связывающих входные и выходные переменнытс (ирсдсгавлсние динамических моделей в виде передаточных функций особснно удобно для целей управления объектом). Примером динамической модели можст служить модель рассмотренного выше аппарата полного смешения, но работающего в неустановившемся режиме.

*Математическая модель* является системой уравнений математического описания, отражающей сущность протекающих в объекте явлений, для которой определен алгоритм решения, реализованный в форме моделирующей программы. Согласно этому определению математическая модель должна рассматриваться в совокупности трех ее аспектов: смыслового, аналитического и вычислительного.

Смысловой аспект представляет собой физическое описание природы моделируемого объекта.

Аналитический аспект является математическим описанием процесса в виде некоторой системы уравнений, отражающей протекающие в объекте явления и функциональные связи между ними.

Наконец, вычислительный аспект есть метод и алгоритм решения системы уравнений математического описания,. реализованные как моделирующая программа на одном из языков программирования.

Представление математической модели процесса в виде совокупности подсистем (блоков) позволяет представить общее математическое описание как совокупность математических описаний отдельных блоков.

Применение блочного принципа построения математических моделей, который, в свою очередь, основан на системном подходе, позволяет во многих случаях также принципиально решить проблему масштабирования процессов. С точки зрения математического моделирования масштабный переход есть не что иное, как деформация математической модели при изменении геометрических размеров, характеризующих аппаратурное оформление процесса. При использовании блочного принципа построения математической модели влияние геометрических размеров на свойства процесса отражается лишь в одной подсистеме (блоке) - блоке "гидродинамика". Поэтому при наличии достаточно корректного в качественном и количественном отношении математического описания этого блока становится возможным осуществить масштабный переход.

Принципиально каждый блок математической модели может иметь различную ступень цетализации математического описания. Важно лишь, чтобы входные и выходные переменные всех блоков модели находились во взаимном соответствии, что обеспечит получение замкнутой системы уравнений математической модели процесса в целом. Что касается состава внутренних переменных блоков, то здесь существует достаточно большая свобода выбора. В идеале математическое описание каждого блока должно включать уравнения, параметрами которых являются только физико-химические свойства веществ. Однако получить такое фундаментальное описание отдельных блоков при недостаточной исследованности отдельных явлений во многих случаях в настоящее время не представляется возможным. Это связано, как правило, с чрезвычайным усложнением математичес-кого описания блока, что само по себе приводит к резкому усложнению ма-тематической модели процесса в целом и, кроме того, может вызвать определенные вычислительные трудности. Поэтому при практическом использовании блочного принципа в математическомописании каждого блока на том или ином уровне его детализации приходится применять эмпирические соотношения.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Что понимается под математическим моделированием?
2. Классификация математических моделей
3. Линейные и нелинейные модели
4. Статические и динамические модели.
5. Модели с сосредоточенными и распределенными параметрами

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Основная*

1. **Гроп Д.** Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
2. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
3. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. –М.: Финансы и статистика, 2006.
4. **Сейдж А., Мелса Дж.** Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.
5. **Советов Б.Я., Яковлев С.А.** Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## Лекция 4

## КРИТЕРИЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Критерии адекватности моделей. Математическая модель объекта является лишь его определенным в рамках принятых допущений аналогом. Поэтому значения переменных, получаемые на модели и объекте, различаются. Здесь возникает задача установления близости модели реальному объекту (установления адекватности модели). Прежде чем приступить к проверке и установлению адекватности, необходимо выработать критерий, который позволил бы сделать заключение о соответствии модели и объекта. Они базируются в основном на методах дисперсионного анализа и анализа остатков.

Дисперсионный анализ моделей используется для сравнения величин остятков с величинами характеризуюшими ошибку измерений. Используя такое сравненне, исследователь способен установить как общую адекватность модели, так и способы ее дальнейшего упрощения с помощью выбрасывания из модели незначимых членов. Для этого вычисляют величины сумм квадратов, характеризующие соответственно разброс экспериментальных данных и разброс рассчитанных по модели значений отклика. Разности называемые остатками, представляют собой меру неспособности модели точно описать экспериментальные данные. Очевидно, что если испытывая модель истинна, то остатки фактически есть оценки экспериментальной ошибки измерений.

На основании метода наименьших квадратов можно показать, что для перечисленных сумм справедливо следующее равенство:

$$SS\ (1) = SS\ (2) + SS\ (3).$$

При проведении дисперсионного анализа каждому отдельному измерению отклика приписывается одна степень свободы. Следовательно, при постановке п опытов для одноткликовой ситуации (ситуации с одной замеряемой выходной переменной) общая сумма квадратов SS(1) обладает п степенями свободы; SS(3) имеет (п - р) и SS(2) имеет р степенеи свободы (р — число параметров в модели , с использованием оценок которых вычисляется сумма SS (2) ).

При проведении повторных измерений в одинаковых условиях эксперимента сумма квадратов, содержит всю необходимую информацию об ошибках измерений.

Если проведено п повторных опытов при каждом из ц различных условий проведения эксперимента, то сумма квадратов имеет п- 1 степеней свободы в одном повторном эксперименте (одна степень свободы используется для оценки), в то время как сумма квадратов обла-дает п- р-q(п— 1) степенями свободы: поеделнее число определяется как разность между числом степеней свободы остаточной суммы квадратов.

Суммы квадратов, обусловленные различными источниками, будучи поделенными на соответствующие числа степеней свободы, определяют соответствующие дисперсии. Очевидно, что адекватность модели может определяться отношением дисперсии адекватности модели к дисперсии воспроизводимости. Если это отношение велико (по крайней мере существенно больше единицы), то имеются достаточно веские доводы в пользу того, что испытываемая модель не отражает результаты эксперимента,

Если модель правильно отражает свойства объекга, то расхождения между экслериментальными значениями и соответствующими значениями, вычислениыми по модели, можно рассматривать как случайные величины. Тогда установление адекватности можно проводить с помощыо проверки некоторых статистических гипотез. Под статистическими гипотезами понимают некоторые предположения относительно распределений генеральной совокупности случайной величины. Проверка гипотезы заключается в сопоставлении статистических показателей, критериев проверки, вычисляемых по выборке, со значениями этих показателей, определенными в предположении, что проверяемая гипотеза верна. Чтобы принять или отвергнуть гипотезу, задают уровень значимости р (обычно от 0,1 до 5 %), который определяет вероятность того, что верная гипотеза будет отвергнута на основании анализа выборки.

Оценка адекватности однооткликовых моделей с помощью критерия Фишера. В случае однооткликовых моделей адекватность может быть проверена с помощью критерия Фишера (Ғ -критерия).

Основная гипотеза, которая при этом проверяется, состоит в следующем : можно ли считать сравниваемые выборочные дисперсии оценками одной и той же генеральной дисперсии ? Если да, то дисперсии незначимо отличаются друг от друга. Рассчитанные по модели значения удовлетворительно совпадают с экспериментальными и модель адекватна объекту в пределах точности эксперимента. В противном случае модель неадекватна обьекту.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Критерий идентификации
2. Функционал невязки
3. Минимизация функционала невязки

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Основная*

1. **Гроп Д.** Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
2. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
3. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. –М.: Финансы и статистика, 2006.
4. **Сейдж А., Мелса Дж.** Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.
5. **Советов Б.Я., Яковлев С.А.** Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## Лекция 5

# ОБЩИЕ ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В практике моделирования систем информатики наиболее часто приходится иметь дело с объектами, которые в процессе своего функционирования содержат элементы стохастичности или подвергаются стохастическим воздействиям внешней среды. Поэтому основным методом получения результатов с помощью имитационных моделей таких стохастических систем является метод статистического моделирования на ЭВМ, использующий в качестве теоретической базы предельные теоремы теории вероятностей. Возможность получения пользователем модели результатов статистического моделирования сложных систем в условиях ограниченности машинных ресурсов существенно зависит от эффективности процедур генерации псевдослучайных последовательностей на ЭВМ, положенных в основу имитации воздействий на элементы моделируемой системы.

Общая характеристика метода статистического моделирования

На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации машинных моделей (аналитических и имитационных) широко используется метод статистических испытаний (Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел, т. е. возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей. Статистическое моделирование представляет собой метод получения с помощью ЭВМ статистических данных о процессах, происходящих в моделируемой системе. Для получения представляющих интерес оценок характеристик моделируемой системы S с учетом воздействий внешней среды E статистические данные обрабатываются и классифицируются с использованием методов математической статистики.

Сущность метода статистического моделирования. Таким образом, сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды E, и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

Различают две области применения метода статистического моделирования: 1) для изучения стохастических систем; 2) для решения детерминированных задач. Основной идеей, которая используется для решения детерминированных задач методом статистического моделирования, является замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики последней совпадают с результатом решения детерминированной задачи. Естественно, что при такой замене вместо точного решения задачи получается приближенное решение и погрешность уменьшается с увеличением числа испытаний (реализации моделирующего алгоритма) N.

В результате статистического моделирования системы S получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени. Если количество реализации N достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик процесса функционирования системы S.

Теоретической основой метода статистического моделирования систем на ЭВМ являются предельные теоремы теории вероятностей. Множества случайных явлений (событий, величин) подчиняются определенным закономерностям, позволяющим не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценить некоторые средние их характеристики, проявляющие определенную устойчивость. Характерные закономерности наблюдаются также в распределениях случайных величин, которые образуются при сложении множества воздействий. Выражением этих закономерностей и устойчивости средних показателей являются так называемые предельные теоремы теории вероятностей, часть из которых приводится ниже в пригодной для практического использования при статистическом моделировании формулировке. Принципиальное значение предельных теорем состоит в том, что они гарантируют высокое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний (реализации) N. Практически приемлемые при статистическом моделировании количественные оценки характеристик систем часто могут быть получены уже при сравнительно небольших (при использовании ЭВМ) N.

Неравенство Чебышева. Для неотрицательной функции $g(\xi)$ случайной величины $\xi$ и любого $K>0$ выполняется неравенство

$$P\{g(\xi)>=K\}\leq M[g(\xi)]/K.$$

В частности, если $g(\xi)=(\xi—x)2$ и $K=k2\sigma2$ (где x—среднее арифметическое;
$\sigma$ — среднее квадратическое отклонение), то

$$P\{|\ \xi\text{-}x|>=k\sigma\}\leq 1/k2).$$

Теорема Бернулли. Если проводится N независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие А осуществляется с вероятностью р, то относительная частота появления события m/N при $N\to\infty$ сходится по вероятности к р, т. е. при любом $\varepsilon>0$

$$\lim P\{|mlN\text{-}p|>=\varepsilon\}=0,$$

где т — число положительных исходов испытания.

Теорема Пуассона. Если проводится N независимых испытаний и вероятность осуществления события А в i-м испытании равна pi, то относительная частота появления события m/N при $N\to\infty$ сходится по вероятности к среднему из вероятностей pi, т. е. при любом $\varepsilon>0$

Теорема Чебышева. Если в N независимых испытаниях наблюдаются значения x1,x2,…,xn случайной величины $\xi$, то при $N\to\infty$ среднее арифметическое значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию а, т. е. при любом $\varepsilon>0$

Обобщенная теорема Чебышева. Если $\xi1$, … ,$\xi n$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями a1, ... an и дисперсиями $\sigma12$, ..,$\sigma n2$, ограниченными сверху одним и тем же числом, то при $N\to\infty$ среднее арифметическое значений случайной величины сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

Центральная предельная теорема. Если $\xi 1$, … ,$\xi n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие математическое ожидание a и дисперсию $\sigma 2$, то при $N\to\infty$ закон распределения суммы, неограниченно приближается к нормальному:

 N β
lim P{α<(Σ xi-Na)/√Nσ<β}=1/√2π ∫ e-t*t/2 dt = Φ0(β)- Φ0(α)
 N→00 i=1 α

Здесь интеграл вероятностей γ

Φ0(γ)=1/2π ∫ e-t*t/2dt.
-∞

Теорема Лапласа. Если в каждом из N независимых испытаний событие A появляется с вероятностью p, то

lim P{α<(m-Np)/√Np(1-p) <β}=Φ0(β)- Φ0(α)
N→∞

где m — число появлений события A в N испытаниях. Теорема Лапласа является частным случаем центральной предельной теоремы.

Примеры статистического моделирования. Статистическое моделирование систем на ЭВМ требует формирования значений случайных величин, что реализуется с помощью датчиков (генераторов) случайных чисел. Не останавливаясь пока на способах их реализации для целей моделирования на ЭВМ, поясним сущность метода статистического моделирования следующими примерами.

Пример 1. Необходимо методом статистического моделирования найти оценки выходных характеристик некоторой стохастической системы Sr, функционирование которой описывается следующими соотношениями: x = 1 — e - " — входное воздействие, v=1-e-φ — воздействие внешней среды, где λ и φ — случайные величины, для которых известны их функции распределения. Целью моделирования является оценка математического ожидания M[y] величины y. Зависимость последней от входного воздействия x и воздействия внешней среды v имеет вид y= √x2+v2.

В качестве оценки математического ожидания M[y], как следует из приведенных теорем теории вероятностей, может выступать среднее арифметическое, вычисленное по формуле N

y=1/N ∑yi,
 i=1

где yi— случайное значение величины y; N — число реализации, необходимое для сстатистической устойчивости результатов.

Здесь элементы выполняют следующие функции:

вычисление B1:возведение в квадрат К,:суммирование С:извлечение квадратного корня И:

Схема алгоритма, реализующего метод статистического моделирования для оценки M[y] системы Sr. Здесь LA и FI -- функции распределения случайных величин λ и φ; N-заданное число реализации; I≡i-номер текущей реализации; LAT≡λi; FII≡φi; EXP≡e; MY≡M[y], SY≡Σyi- суммирующая ячейка; ВРМ[...], ГЕН[...], ВРМ[...]—процедуры ввода исходных данных, генерации псевдослучайных последовательностей и выдачи результатов моделирования соответственно.

Таким образом, данная модель позволяет получить методом статистического моделирования на ЭВМ статистическую оценку математического ожидания выходной характеристики M[y] рассмотренной стохастической системы Sr. Точность и достоверность результатов взаимодействия в основном будут определяться числом реализации N.

Пример 2. Необходимо методом статистического моделирования решить следующую задачу. Проводится s= 10 независимых выстрелов по мишени, причем вероятность попадания при одном выстреле задана и равна p. Требуется оценить вероятность того, что число попаданий в мишень будет четным, т. е. О, 2, 4, 6, 8,10. Данная задача является вероятностью, причем существует ее аналитическое решение.

В качестве объекта статистического моделирования можно рассмотреть следующую вероятностную систему Sp, структура которой представлена где элементы выполняют такие функции.

Выходным воздействием в данной системе Sp является событие четного числа попаданий в мишень в серии из десяти выстрелов. В качестве оценки выходной характеристики необходимо при числе испытаний (серий выстрелов), равном N, найти вероятность четного числа попаданий:

Логическая схема алгоритма статистического моделирования для оценки искомой характеристики такой системы P(y). Здесь P=p—заданная вероятность попадания в мишень при одном выстреле; N — заданное число реализации; XI≡xi, HJ≡ħj, PY≡P(y), SY≡Σ yj- суммирующая ячейка.

В данном моделирующем алгоритме после ввода исходных данных и реализации операторов цикла происходит обращение к генератору случайных чисел, т. е. получаются значения x, случайной величины, равномерно распределенной в интервале (0, 1). Вероятность попадания случайной величины в интервал (0, p), где o< 1, равна длине этого отрезка, т. е. P {xi<p] == p. Поэтому при каждом моделировании выстрела полученное случайное число x, сравнивается с заданной вероятностью p и при x,<p регистрируется «попадание в мишень», а в противном случае — «промах». Далее моделируются серии из десяти испытаний каждая, подсчитывается четное число «попаданий» в каждой серии и находится статистическая оценка искомой характеристики P (y).

Таким образом, подход при использовании статистического моделирования независимо от природы объекта исследования (будет ли он детерминированным или стохастическим) является общим, причем при статистическом моделировании детерминированных систем необходимо предварительно построить стохастическую систему, выходные характеристики которой позволяют оценить искомые.

Отметим, что во всех рассмотренных примерах не требуется запоминания всего множества генерируемых случайных чисел, используемых при статистическом моделировании системы S. Запоминается только накопленная сумма исходов и общее число реализаций. Это немаловажное обстоятельство вообще является характерным при реализации имитационных моделей методом статистического моделирования на ЭВМ.

Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации

При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. Количество случайных чисел, используемых для получения статистически устойчивой оценки характеристики процесса функционирования системы S при реализации моделирующего алгоритма на ЭВМ, колеблется в достаточно широких пределах в зависимости от класса объекта моделирования, вида оцениваемых характеристик, необходимой точности и достоверности результатов моделирования. Для метода статистического моделирования на ЭВМ характерно, что большое число операций, а соответственно и большая доля машинного времени расходуются на действия со случайными числами. Кроме того, результаты статистического моделирования существенно зависят от качества исходных (базовых) последовательностей случайных чисел. Поэтому наличие простых и экономичных способов формирования, последовательностей случайных чисел требуемого качества во многом определяет возможность практического использования машинного моделирования систем.

Рассмотрим возможности и особенности получения последовательностей случайных чисел при статистическом моделировании систем на ЭВМ. На практике используются три основных способа генерации случайных чисел: аппаратный (физический), табличный (файловый) и алгоритмический (программный).

Аппаратный способ. При этом способе генерации случайные числа вырабатываются специальной электронной приставкой — генератором (датчиком) случайных чисел,— служащей в качестве одного из внешних устройств ЭВМ. Таким образом, реализация этого способа генерации не требует дополнительных вычислительных операций ЭВМ по выработке случайных чисел, а необходима только операция обращения к внешнему устройству (датчику). В качестве физического эффекта, лежащего в основе таких генераторов чисел, чаще всего используются шумы в электронных и полупроводниковых приборах, явления распада радиоактивных элементов и т. д.

Табличный способ. Если случайные числа, оформленные в виде таблицы, помещать во внешнюю или оперативную память ЭВМ, предварительно сформировав из них соответствующий файл (массив чисел), то такой способ будет называться табличным. Однако этот способ получения случайных чисел при моделировании систем на ЭВМ обычно рационально использовать при сравнительно небольшом объеме таблицы и соответственно файла чисел, когда для хранения можно применять оперативную память. Хранение файла во внешней памяти при частном обращении в процессе статистического моделирования на рационально, так как вызывает увеличение затрат машинного времени при моделировании системы из-за необходимости обращения к внешнему накопителю. Возможны промежуточные способы организации файла, когда он переписывается в оперативную память периодически по частям. Это уменьшает время на обращение к внешней памяти, но сокращает объем оперативной памяти, который можно использовать для моделирования процесса функционирования системы S.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Структурная статистическая идентификация.
2. Статистические аппараты исследования
3. Организация статистической процедуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Основная*


1. **Гроп Д.** Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
2. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
3. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. –М.: Финансы и статистика, 2006.
4. **Сейдж А., Мелса Дж.** Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.
5. **Советов Б.Я., Яковлев С.А.** Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## Лекция 6

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ

Применение методов наименьших квадратов и максимального правдоподобия для нахождения точечных оценок параметров. Построенные с по-мощью экспериментального либо экспериментально-аналитического метода математические модели содержат неизвестные константы (параметры), значения которых определяются по экспериментальным данным. Если используемые модели линейны относительно искомых параметров, то задача их оценки сравнительно легко решается методами линейного регрессионного анализа и, в частности, методом наименыиих квадратов.

Оценка неизвестных параметров в методе наименьших квадратов про-изводится с помощью минимизации суммы квадратов рассогласований. Такой подход во многих важных ситуациях приводит к оценкам, обладающим важными свойствами оптимальности.

Схему наблюдений называют линейной моделью. Эту модель удобно записать в матричной форме.

В данном случае применение метода наименыних квадратов состоит в минимизации суммы квадратов

Однако подавляющее большинство моделей нелинейны по параметрам, что значительно усложняет методы их оценки. Рассмотрим процедуру идентификации таких моделей более подробно. Пусть имеется т моделей механизма протекания процесса в аппарате.

Между случайными величинами обычно существует такая связь, при которой с изменением одной величины меняется распределение другой. Такая связь называется стохастической.

Если две случайные величины X и Y независимы, то дисперсия суммы этих величин равна сумме дисперсий:

$$Д(X + Y)=Д(X) + Д(Y).$$

Если же данное равенство не выполняется, то величины X и Y являются зависимыми.

Матрица в правой части последнего уравнения называется дисперсионно-ковариационной матрицей, Ее диагональные элементы представляют собой дисперсии случайных величин, а недиагональные — ковариации соответствующих случайных величин, определяющие статистическую зависимость между ними.

Рассмотрим сначала однооткликовые модели, т.е. модели с одной выходной переменной. При оценке неизвестных параметров моделей очень часто используется метод максимального правдоподобия, предложенный Р. Фишером и являющийся основой многих процедур проверки гипотез и доверительного интервального оценивания для больших выборок.

Пусть имеется непрерывная случайная величина, закон распределения которой задан плотностью вероятности f(x, Ѳ). Составим функцию правдоподобия:

Суть метода. максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве оценок параметров Ѳп — (Ѳ1у Ѳ2, ..., Ѳр) берут такие значения Ѳ1г Ѳ2, ..., Ѳр, при которых fп достигает наибольшего возможного значения. Так как 1пf/п достигает максимума при тех же значекиях Ѳ, что и сама fп, то на практике часто удобнее использовать функцию

1пfп , которую можно называть логарифмической функцией правдоподобия. Значения Ѳ\, Ѳ2, …, Ѳр являются функциями выборки Xi, x2, ..., xп и называются оценками максимального правдоподобия.

Для нахождения оценок максимального правдоподобия следует решить относительно Ѳ1гѲ2,..., Ѳр систему уравнений правдоподобия

Если семейство распределений ошибок воспроизводимости еи отвечает условиям регулярности, то оценки максимальңого правдоподобия в большинстве случаев являются состоятельными в том смысле, что оценка параметров по вероятности стремится к истинному значению, когда объем опмтов неограниченно растет. Условия регулярности и состоятельности обсспечивают асимптотическую эффективность оценок параметров. Кроме того, если распределение ошибок измерений принадлежит параметрическому эспоненциальному типу, то оценка вектора неизвестных параметров является достаточной, т.е. содержит всю необходимую информацию, имеющуюся в исходных экспериментальных данных. Итак, оценки искомых параметров, найденные методом максимального правдоподобия, при достаточно слабых ограничениях на функцию распределения ошибок еи и ири больших выборках обладают многими важными оптимальными свойствами.

При практическом использовании метода максимального правдоподобин обычно предполагается известным вид плотности распределения ошибок наблюдений, причем наряду с неизвестными параметрами моделей могут быть оценены и неизвестные параметры плотности распределения.

Предположим.что для модели некоторым способом получены оцснки параметров Ѳ.

Пусть поставлены п опытов. Обозначимчерез р(еи, ф) плотность рас-пределения случайной величины еи, а через р(е, ф) — совместную плотность распределения случайного вектора е = (еь е2, ..., еп), где ф - вектор параметров плотности распределения, содержащий, в частности, для нормальной плотности величины математического ожидания и дисперсии воспроизводимости.

В зависимости от плотности распределения вероятностей ошибок наблюдений е определяется конкретный вид функции Ь'1' (Ѳ ., ф). Так, если случайные величины еи (и = 1, 2, ...,л) независимы и нормально распределеңы с нулевым средним и известными дисперсиями.

Отметим, что при нормально распределенных ошибках наблюдений оценки нараметров, найденные методом максимального правдоподобия и методом наименьших квадратов, совпадают и поэтому они обладают общими оптимальными свойствами.

В соответствии с принципом максимального правдоподобия оценки параметров максимального правдоподобия Ѳ при известной дисперсионно-ковариационией матрице изменений максимизируют, если вектор параметров Ѳ минимизирует величину.

Если матрица 2 - диагональная, то представляет собой взвешенную сумму квадратов остатков.

Если дисперсионно-ковариационная матрица ошибок наблюдений априори неизвестна, то, используя байесовский подход, оценки параметров максималького правдоподобия получают минимизацией по параметрам

В ряде случаев.особенно при распределениях ошибок наблюдений, отличных от нормальных, испояьзование метода максимального правдоподобия приводит к иным критериям, характеризующим степенъ близости расчетных и экспериментальных данных. В частности, если ошибка распределена по Лапласу, то необходимо использовать для однооткликовых ситуаций метод наименьших модулей и соответственно критерий равенства.

Интервальные оценки параметров. Выше говорилось о точечных оцен-ках искомых параметров моделей, полученных методом максимального правдоподобия. Последние, хотя и обладают некоторыми оптимальными асимптотическими свойствами, но не обеспечивают важную дополнитель-иую информаиию о точности определяемых оценок и о мере нелинейности модели особенно в малых выборках. Такую ннформацию содержат харак-терситики доверительных областей.

Доверительный интервал (доверительная область) для некоторого параметра (совокупности параметров) функции распределения есть интервал (область) в параметрическом пространстве, определяемый достаточной статистикой выборки измеренных величин и обладающий тем свойством что вероятность того, что он содержит "истинное" значение параметра, равна по крайней мере наиеред заданному значению а. Величину а называют доверительным уровнем.

Рассмотрим сначала случай, когда модель f(x, Θ ) является линейной функцией параметров (т.е.f(x, Θ) = xΘ). Оценки максимального правдоподобия Θ здесь являются наилучшими линейными несмещенными оцен-ками Θ, и точные доверительные области Θ могут быть построены с исполь-зованием декомпозішии суммы квадратов на остаточную сумму квад-ратов и сумму квадартов, обусловленную регрессией.

В случае достаточности оценки остаточная сумма квадратов не зависит от Θ, а зависит только от x и y.

Рассмотрим теперь задачу построения точных доверительных областей для параметров Θ в случае нелинейных относительно параметоов моделей, общий интегральный вид которых может быть записан как f(д:, Θ). Данная задача по сравнению с линейным случаем резко усложняется, так как для нелинейных по параметрам моделей не существует множества достаточных статистик. Однако при определенных условиях регулярности для f(x , Θ) и при многомерном нормальном распределении существует множество статистик, совместно достаточных для Θ ; это имеет место тогда и только тогда, когда f(x, Θ) существенно линейна.

Для аппроксимации f(x, Θ) линейной формой необходимо разложить f(x, Θ) в подходящие многомерные ряды с их последующим усечением Выбор осуществляют таким образом, чтобы было достигнуто наилучшее приближение f(x , Θ) усеченным рядом. Затем выбирают квадратичные формы чтобы построить 100 а %-ные доверительные области для Θ. При этом точность аппроксимации практически не влияет на точность оценки вероятности выполнения неравенства.

Таким образом, в общем случае для нелинейно параметризованных моделей большая часть результатов, полученных для линейных моделей, неприменима. В самом деле, даже если ошибка измерений нормальна, вектор параметров может не быть нормально распределенной величиной.

Все же в большинстве случаев оценивание параметров в нелинейных моделях проводится по небольшим совокупностям экспериментальных данных и поэтому результаты асимптотической теории малопригодны на практике,

Построение доверительных интервалов параметров нелинейных моделей может проводиться с учетом степени нелинейности модсли. Мера, учитываюшая степень целинейности /(x, Θ), позволяет усгановить, для каких нелинейно параметризованных моделей /(x, Θ) без заметных по-грешностей можно построить доверительные обяасги, используя вместс /(x, Θ) линеаризованные модели. Однако при величинах меры нелиней-ности, больших единицы, данный метод построеішя доверихельных областей становится уже непригодным.

Интервальные оценки параметров нелинейных моделей при сравнительно небольших затратах на вычислительную работу позволяет получить метод поочередной оценки приближений искомого параметра (джек-найф-метод). Этот метод, не требующий использования никаких предположений о нормальности ошибок измерений или их однородности, дает возможность определить оценки Ө, которые асимптогически нормально распределены.

Для проверки гипотезы о среднем значении и вычисления доверительного интервала в одномерном случае обычно используется статистика, получающаяся в результате деления разности между выборочным средним значением 0 и гипотетическим математическим ожиданием 0 генеральной совокупности на среднеквадратическое отклонение а. Основываясь на этом, можно построить критерий для проверки гипотезы Ө = Ө0, где Ө0 — заданное число, или построить доверительный интервал для неизвестного параметра.

Совокупносгь точек, координаты которых удовлетворяют условию, образуют в р-мерном пространстве гиперэллипсоид, размеры и форма когорого зависят от уровня значимости а. Отметим, что эллипсоид, удовлетворяющий условию , конечно, является случайным, так как случайна выборка Отметим, что численные значения оценки при п зависят от исходного разбиения вектора наблюдений на подвекторы к, так как индквидуальные наблюдения в общем имеют неидентичные распределения. Если план эксперимента предусматривал проведение к повторных измерений а каждой из т точек (п = кт), то обычно выбирают п — к и исключают последовательно по одной полной реплике при конструировании процедуры. Часто при применении этой процедуры полагают, что устраняет неопределенность в разбиении у на подвекторы. У т более надежные результаты. Байесовские оценки параметров. В рассмотренных выше методах оценки параметров нелинейных моделей совсем не использовалась априорная (известная цо эксперимента) информация о параметрах, которой во многих случаях располагает исследователь. Дело в том, что практически всегда еще до постаиовки эксперимента исследователь имеет некоторое представление о числовых значениях парамегров модели. В частности, исходя из физического смысла изучаемого процесса, он может заранее исключить значения ряда параметров как невозможные, либо установить предлочтителнгость одних числовых значений параметров перед другими. Все свои априорные сведения исследователь закладывает в так называемом априорном распределении параметров Ғ0 0) или априорной плотности распределения рп 0). Функция плотности распределения параметров р0 0) является неотрицательной и обладает следующим свойством; Ро 0 і) /ро (Ө 2) > 1. если значения вектора параметров Ө х правдоподобнее значений 02- При этом не требуется выполнения условий нормировки ір0 (Ө)О.Ө = І. Очевидно, что равномерная априорная плотность распределения параметров характеризует ситуацию, когда все значения Ө равновероятны в допустимой области существования параметров. После формализации априорных сведений об изучаемом процессе и построения априорной плотности распределения параметров р0 (Ө) исследователь проводит эксперимент. При этом вся экспериментальная информация содержится в функции правдоподобия Ь (Ө\у). Тогда вся информация, характеризующая параметры Ө, будет сосредоточена в апостериорной (полученной после эксперимента) плотности распределения р(Ө \у),

После построения апостериорной плотности распределенияр(Ө | у) переходят к непосредственному расчету точечных оценок вектора парамет-ров 6. В статистике оценки Θ, использующие априорную информацию и вычисленные по апостериорий плотности распределения p(Θ\y), носят название байссовских оценок, Чаще всего в физико-химических иссле-д^ованиях в качестве байесовской оценки параметров используют оценку Θ , удовлетворяющую условию,что является естественным обобщением метода максимального правдо-подобия на задачи байесовского оценивания.

Оценки Θ иногца называют обобщенными оценками максимального правдотюдобия. Они, в частности, совпадают с оценками максимального нравдоподобия, если плотность распределения p0(Θ) равномерна. Кроме того, вектор истинных значений параметров Θис7 сходится к Θ при любом Ро(Θ) и при неограниченном увеличении объема выборки. Следовательно, оценки Θ обладают свойствами состоятелытости и асимптотической эффективности, как и оценки максимального правдоподобия.

Отметим в заключение, что построение точной апостериорной плотности распределения параметров Θ возможно только для линейно параметризованных моделей. Однако большинство моделей процессов являются нелинейно параметризованными. Поэтому для них обычно требуется линеаризация по параметрам.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Статические детерминированные модели
2. Динамические детерминированные модели.
3. Исходная информация для идентификации.
4. Оценка по методу наименьших квадратов

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Основная*


1. **Гроп Д.** Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
2. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
3. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. –М.: Финансы и статистика, 2006.
4. **Сейдж А., Мелса Дж.** Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.
5. **Советов Б.Я., Яковлев С.А.** Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## Лекция 7

## МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассмотрим некоторые особенности статистических методов, используемых для обработки результатов моделирования системы S. Для случая исследования сложных систем при большом числе реализации N в результате моделирования на ЭВМ получается значительный объем информации о состояниях процесса функционирования системы. Поэтому необходимо так организовать в процессе вычислений фиксацию и обработку результатов моделирования, чтобы оценки для искомых характеристик формировались постепенно по ходу моделирования, т. е. без специального запоминания всей информации о состояниях процесса функционирования системы S.

Если при моделировании процесса функционирования конкретной системы S учитываются случайные факторы, то и среди результатов моделирования присутствуют случайные величины. В качестве оценок для искомых характеристик рассчитывают средние значения, дисперсии, корреляционные моменты и т. д.

Пусть в качестве искомой величины фигурирует вероятность некоторого события А. В качестве оценки для искомой вероятности p=P(A) используется частность наступления события m/N, где т — число случаев наступления события А; N — число реализации. Такая оценка вероятности появления события А является состоятельной, несмещенной и эффективной. В случае необходимости получения оценки вероятности в памяти ЭВМ при обработке результатов моделирования достаточно накапливать лишь число т (при условии, что N задано заранее).

Аналогично при обработке результатов моделирования можно подойти к оценке вероятностей возможных значений случайной величины, т. е. закона распределения. Область возможных значений случайной величины η разбивается на п интервалов. Затем накапливается количество попаданий случайной величины в эти интервалы $m_k, k=\overline{1,n}.$. Оценкой для вероятности попадания случайной величины в интервал с номером k служит величина mk/N. Таким образом, при этом достаточно фиксировать n значений mk при обработке результатов моделирования на ЭВМ.

Для оценки среднего значения случайной величины η накапливается сумма возможных значений случайной величины yk, k=$\overline{1,N}$, которые она принимает при различных реализациях. Тогда среднее значение

$$\overline{y}=(1/N)\sum_{k=1}^{N}y_k.$$

При этом ввиду несмещенности и состоятельности оценки

$$M[\overline{y}]=M[\eta]=\mu_\eta; D[\overline{y}]=D[\eta]/N=\sigma_\eta^2/N.$$

В качестве оценки дисперсии случайной величины η при обработке результатов моделирования можно использовать

$$S_b^2 = \sum_{k=1}^{N} (y_k - \overline{y})^2 / N.$$

Непосредственное вычисление дисперсии по этой формуле нерационально, так как среднее значение $\overline{y}$ изменяется в процессе накопления значений yk. Это приводит к необходимости запоминания всех N значений yk. Поэтому более рационально организовать фиксацию результатов моделирования для оценки дисперсии с использованием следующей формулы:

$$D[\eta] = \sigma_\eta^2 = \left[ \sum_{k=1}^{N} y_k^2 - \left( \sum_{k=1}^{N} y_k \right)^2 / N \right] / (N-1).$$

Тогда для вычисления дисперсии достаточно накапливать две суммы: значений yk и их квадратов yk2.

Для случайных величин ξ и η с возможными значениями xk и yk корреляционный момент

$$k_{\xi\eta} = \left[ \sum_{k=1}^{N} (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) \right] / N$$

или

$$k_{\xi\eta} = \left( \sum_{k=1}^{N} x_k y_k - (1/N) \sum_{k=1}^{N} x_k \sum_{k=1}^{N} y_k \right) / (N-1).$$

Последнее выражение вычисляется при запоминании в процессе моделирования небольшого числа значений.

Если при моделировании системы S искомыми характеристиками являются математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса y (t) [в интервале моделирования (0, T)], то для нахождения оценок этих величин указанный интервал разбивают на отрезки с постоянным шагом Δt и накапливают значения процесса yk(t) для фиксированных моментов времени t=tm=mΔt.

При обработке результатов моделирования математическое ожидание и корреляционную функцию запишем так:

$$\overline{y}(t_m) = \sum_{k=1}^{N} y_k(t_m) / N; \tilde{B}(u,z) = \sum_{k=1}^{N} (y_k / u) - \overline{y}(u))(y_k(z) - \overline{y}(z)) / (N-1),$$

где u и z пробегают все значения tm.

Для уменьшения затрат машинных ресурсов на хранение промежуточных результатов последнее выражение также целесообразно привести к следующему виду:

$$\tilde{B}(u,z) = \left( \sum_{k=1}^{N} y_k(u) y_k(z) - (1/N) \sum_{k=1}^{N} y_k /(u) \sum_{k=1}^{N} y_k(z) \right) (N-1).$$

Отметим особенности фиксации и обработки результатов моделирования, связанные с оценкой характеристик стационарных случайных процессов, обладающих эргодическим свойством. Пусть рассматривается процесс y (t). Тогда с учетом этих предположений поступают в соответствии с правилом: среднее по времени равно среднему по множеству. Это означает, что для оценки искомых характеристик выбирается одна достаточно продолжительная реализация процесса y(t), для которой целесообразно фиксировать результаты моделирования. Для рассматриваемого случая запишем математическое ожидание и корреляционную функцию процесса:

$$\overline{y} = \lim_{T\to\infty}(1/T)\int_0^T y(t)dt; B(\tau) = \lim_{T\to\infty}[1/(T-\tau)]\int_0^{T-\tau} y(t)y(t+\tau)dt - \overline{y}^2.$$

На практике при моделировании на ЭВМ системы S интервал (О, Т) оказывается ограниченным и, кроме того, значения y(t) удается определить только для конечного набора моментов времени tm. При обработке результатов моделирования для получения оценок $\overline{y}$ и B (τ) используем приближенные формулы

$$\overline{y} = (\Delta t/T)\sum_{m=1}^{T/\Delta t} y(t_m); B(\tau) = [\Delta t/(T-\tau)]\sum_{m=1}^{(T-\tau)/\Delta t} y(t_m)y(t_m+\tau) - \overline{y}^2,$$

которые целесообразно преобразовать к виду, позволяющему эффективно организовать порядок фиксации и обработки результатов моделирования на ЭВМ.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Определение корреляционных функций сигналов.
2. Статические методы получения частотных характеристик.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Основная*


1. **Гроп Д.** Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
2. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
3. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. –М.: Финансы и статистика, 2006.
4. **Сейдж А., Мелса Дж.** Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.
5. **Советов Б.Я., Яковлев С.А.** Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## Лекция 8

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СИТСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Математические модели как один из методов моделирования является наиболее мощным инструментом исследования сложных систем различной природы. Опираясь на достижения современной математики, он обеспечивает решение многих практических задач. Доставляя исследователю теоретически подтвержденные и обоснованные решения, обладая мощнейшим аппаратом решения задач, математическое моделирование, вместе с тем, имеет и определенные недостатки. Связаны они ни сколько с объективными причинами, а скорее с постоянно продолжающимся процессом постановки новых, все более сложных задач, что, в свою очередь, заставляет непрерывно развиваться и как таковую математику. И, конечно, сама математика, находясь в непрерывном развитии, не только предлагает практикам все новые и новые методики и методы исследования, но и открывает возможности изучения все более и более сложных объектов.

С точки зрения моделирования систем, математическое моделирование, к сожалению, не позволяет пока исследовать сложные, в основном, организационные системы. Связано это с тем, что названные системы настолько разнообразны и разнородны по возможностям математического описания их элементов, что возникает задача объединения различных математических аппаратов. В настоящее время данная задача решается посредством имитационного моделирования. А это численный эксперимент, дающий частные результаты.

Очевидно, что наиболее продуктивные и глубокие результаты следует ожидать от математического моделирования, но практические исследования сложных систем приводят к необходимости использования имитации. По-видимому, это объективно параллельный процесс – развивается аппарат математического моделирования, но одновременно усложняются и исследуемые системы.

Далее мы будем рассматривать математическое моделирование не в форме традиционного описания методик и методов, примеров и полученных результатов, а совместим такое изложение с взаимной увязкой с ранее и позднее изучаемыми дисциплинами учебного плана инженера-системотехника. Такой подход основан на монографии Р. Ли.

Следуя Р. Ли, выделим пять крупных классов, решаемых с помощью математического моделирования. Часть из них прямо связаны с решением задач управления, а часть - обеспечивает решение задач анализа объектов исследования. Но во всех случаях получаемый результат достигается с условием его приближения к неким идеальным, желаемым состояниям. Поиск оптимального решения - это, пожалуй, основная цель существования большинства людей.

В самом общем виде типичную задачу оптимизации можно разложить на следующие составляющие:

1. определение цели,
2. уяснение текущего положения по отношению к цели,
3. описание внешних и внутренних факторов, влияющих на прошлое, настоящее и будущее состояния системы,
4. составление наиболее приемлемой стратегии достижения цели.

Все эти составляющие в полном объеме находят отражение в описываемых ниже классах математических моделей.

### 8.1. Детерминированное управление.

Рассмотрим следующую задачу (рис. 1).

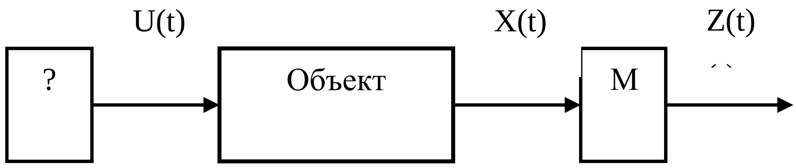


Рис. 1. Детерминированное управление.

На приведенной схеме имеют место объект и измерительное устройство М. Последнее предназначено для фиксации выходного сигнала объекта x(t) в другой, необходимой и понятной исследователю форме – измеренном сигнале z(t). Наличие и необходимость измерителя в данной задаче не столь очевидно в сравнении с другими, рассматриваемыми ниже задачами, когда на объект или измеритель воздействуют внешние помехи. Входной сигнал объекта u(t) носит название управляющего и является выходным сигналом неизвестного устройства управления.

В задаче даны динамические соотношения, описывающие объект и измеритель. Последнее означает, что исследователь обладает математической моделью (динамическое соотношение), адекватно описывающей функционирование объекта или измерителя. Иными словами, исследователю известно как объект перерабатывает управляющий сигнал u(t) в выходной сигнал объекта x(t) или как измеритель перерабатывает свой входной сигнал x(t) в измеренный вход z(t). Знание характера отображения этих преобразований во времени выражается в том, что все сигналы зависят от времени t и сами соотношения названы динамическими.

Необходимо отыскать такое управление u(t), чтобы выход объекта x(t) или измеренный выход z(t) были как можно ближе к желаемым $x^*(t)$ или $z^*(t)$.

Конечно, термин «желаемый» невозможно определить математически. Но как только данная (и любая рассматриваемая ниже) задача будет конкретизироваться для реального объекта и измерителя, сразу же открывается возможность количественно выразить желаемые значения $x^*(t)$ и $z^*(t)$ и сформулировать критерий близости выходного или измеренного сигнала к необходимым, желаемым значением.

Методы решения данного класса задач можно разделить на две категории – аналитические и численные. И они изучаются в курсе «Высшая математика» и в специальном курсе «Вычислительная математика».

Отличие аналитических и численных методов является прямым отражением тех отличий, которые разделяют математическое и имитационное моделирование. Главное же отличие состоит в том, что если решение получено, то оно распространяется на целый класс задач, а не одну специфическую задачу. Именно это и придает большое теоретическое значение аналитическим методам.

***Аналитические методы.***

Классическим аналитическим методом решения одного из вариантов рассматриваемой задачи является задача дифференциального исчисления. Рассмотрим скалярную функцию z=z(x,u) без ограничений, где x и u, соответственно, n- и m-мерные векторы. Необходимо найти такие x и u, при которых z достигает минимума.

Необходимые условия имеют следующий вид:

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx = 0.$$

Так как приращения du и dx произвольны, то градиенты $\partial y/\partial u$ и $\partial y/\partial x$ должны равняться нулю в стационарной точке.

Для нахождения достаточных условий рассмотрим разложение в ряд Тейлора в окрестности стационарной точки:

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + [dx', du'] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial u} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial u} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= 0 + 0 + [dx', du'] \cdot [D] \cdot \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + \ldots$$

Если стационарная точка является точкой минимума, то $\delta z > 0$, если точкой максимума, то $\delta z < 0$. Если $\delta z = 0$, то мы имеем дело с особой точкой – точкой разрыва, точкой перегиба и т.д. В первом случае матрица [D] должна быть положительно определенной (условие Лежандра-Клебша).

*Пример 1.* Пусть объект на рис 3.1 описывается соотношением $x=2\cdot u$, а измеритель – соотношением $z = e^{-ax}$.

Нам необходимо найти такое управление u, чтобы измеренный выход стремился к единице ($z^*=1$).

*Решение.* Используя данные динамические соотношения, найдем зависимость измеренного выхода z от управления

$$z = e^{-2au} \qquad (*)$$

В качестве критерия оценки близости измеренного выхода z к желаемому $z^*$ выберем распространенный критерий квадрата разностей

$$\min_z \left\{ \left(z - z^*\right)^2 \right\}$$

Подставим (*) и $z^*$ в выражение критерия

$$\min_z \left\{ \left(e^{-2au} - 1\right)^2 \right\}$$

и найдем экстремум полученной функции

$$\frac{d}{du}\left\{\left(e^{-2au}-1\right)^2\right\}=-4a\cdot e^{-2au}\cdot\left(e^{-2au}-1\right)=0..$$

Отсюда получаем $u_1=+\infty$ и $u_2=0$.

Проверим достаточные условия

$$\frac{d^2}{du^2}\left\{\left(e^{-2au}-1\right)^2\right\}=8a^2e^{-2au}\cdot\left(2e^{-2au}-1\right).$$

При $u_1=+\infty$ $\frac{d^2}{du^2}\{\bullet\}=0$, то есть в данном случае мы получили особую точку, которую (при необходимости) можно исследовать хорошо описанными методами.

При $u_2=0$ $\frac{d}{du^2}\{\bullet\}=8a^2>0$. Таким образом, при управлении u=0 объект будет таким образом перерабатывать этот управляющий сигнал, что измеренный сигнал z будет приведен к желаемому $z^*=1$.

Вновь отметим, что наша цель состоит в осуждении основных понятий, различных методов. Различным методам присущи свои ограничения, которые не являются абсолютными. Во многих случаях они преодолимы. Действительно, написано множество книг о различных обобщениях и изменениях одного только дифференциального исчисления. А ведь есть еще и вариационное исчисление и т. д. и многие другие весьма и весьма интересные математические модели, укладывающиеся в класс задач детерминированного управления. И, чтобы не уйти от цели изложения, адресуем читателя к соответствующим литературным источникам. Тем более, что к моменту изучения курса, связанного с моделированием сложных систем, вы в достаточной мере должны были освоить курс высшей математики.

***Численные методы.***

Рассматривая задачу дифференциального исчисления, мы видим, что нам необходимо было решить уравнение для определения необходимых условий оптимальности. Но, к сожалению, не всегда возможно разрешить эти уравнения. Аналогичные трудности возникают и в других аналитических методах.

Для решения поставленной задачи детерминированного управления применяются численные методы, которые изучаются в курсе «Вычислительная математика» и ему подобным.

Основная идея численных методов состоит в задании начальных значений оптимизируемого сигнала, определении правил их изменения и задании условий окончания процесса изменения значений сигнала.

Проиллюстрируем сказанное на примере простейшего численного метода нахождения экстремума – метода дихотомии (половинного деления).

Пусть зависимость квадрата разности между измеренным выходом z и его желаемым значением $z^*$ от управляющего сигнала и представлена на рис. 2. Зададим начальное управления $u_0$ и вычислим соответствующее ему значение оптимизируемой величины $z_0'$.

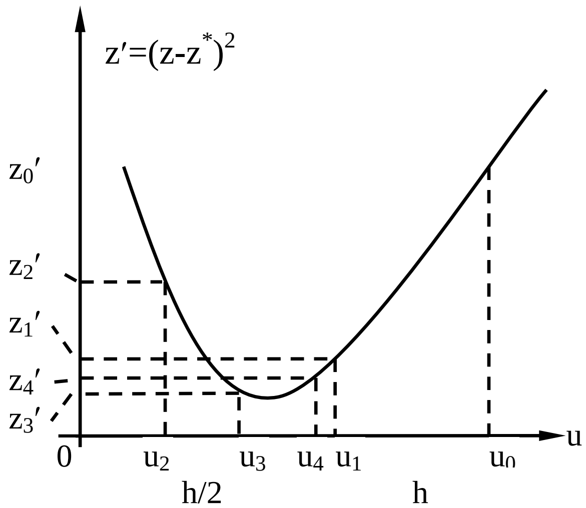


Рис. 2. Численные методы

Условимся, что будем изменять управляющий сигнал u на шаг h. При этом, начнем изменение так, чтобы $z_1' < z_0'$. Вновь изменяем u на шаг h. Получаем новое управление $u_2$ и соответствующее ему $z_2'$. Проверяем условие: $z_2' < z_1'$.

Если это условие выполняется, то действуем аналогично. Если – нет (как в нашем примере), то меняем знак шага на противоположный (меняем направление движение), а величину шага уменьшаем в два раза – h/2. Получим новое управление $u_3$ и соответствующее ему $z_3'$.

Так как $z_3' < z_2'$, то вновь вычисляем новое управление $u_4$, еще раз уменьшаем шаг в два раза – h/4 и меняем направление движения на противоположное. И так действуем далее.

Для того, чтобы прекратить процесс нахождения экстремума необходимо задать для решаемой задачи величину расхождения между предыдущим и последующим значениями измеренного выхода z′.

Таким образом, задачи данного класса – детерминированного управления – могут решаться либо (а это предпочтительнее) аналитическими методами, либо численными методами. И те, и другие изучаются в курсах, соответственно, «Высшая математика» и «Вычислительная математика».

### 8.2. Задача оценки.

Рассмотрим следующую задачу (рис. 3)

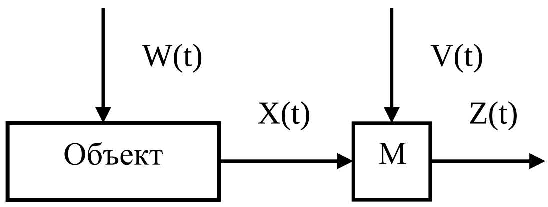


Рис. 3. Задача оценки.

Здесь w(t) и v(t) – действующие на объект и измеритель шумы (помехи).

Известные динамические соотношения, описывающие работу объекта (зависимости между w(t) и x(t)) и работу измерителя (зависимости между x(t), v(t) и z(t)). Помехи w(t) и v(t) заданы статистическими описаниями, методику составления которых будем рассматривать ниже. Сейчас же, для определенности, мы скажем, что это результат статистической обработки соответствующих сигналов, обеспечивающих исследователя по возможности полным представлением о их вероятностно-статистических свойствах.

В данной задаче (как и во всех последующих) четко проявляется необходимость выделения объекта и измерителя. Связано это с тем, что действие помех на измеритель может быть относительно просто описано. Измеритель – это ведь известный прибор в отличие от объекта. Поэтому в измеренном сигнале появляется возможность более точного оценивания воздействия, влияния помех именно на объект. В результате наблюдений за объектом зафиксированы также измерения z(t/T) в момент времени $t \le T$.

Необходимо оценить наилучшую в некотором смысле оценку выходного сигнала объекта x(t/T).

Еще раз подчеркнем, что при конкретизации задачи и задания конкретного критерия задача становится математически определенной.

Оценка выходного сигнала объекта может быть проведена в трех видах (рис. 4):

- когда выходной сигнал оценивается в момент времени окончания фиксации измерений t=T (задача фильтрации);
- когда выходной сигнал оценивается в прошедшие моменты времени $t<T$ (задача интерполяции);
- когда выходной сигнал оценивается в будущие моменты времени $t>T$ (задача экстраполяции).

Последние две задачи в совокупности называют задачей прогнозирования (предсказания).

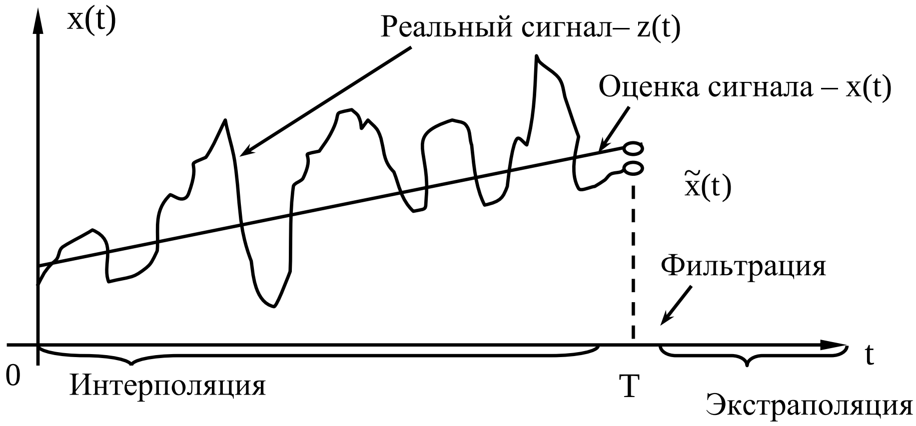


Рис. 4. Задачи фильтрации и прогнозирования

***Фильтрация.***

В данном параграфе рассматривается одна из простейших математических схем, решающих задачу фильтрации. Основная его теория хорошо известна. Поэтому, здесь мы лишь рассмотрим основные идеи фильтра Винера и его связь с изучаемой и иными учебными дисциплинами.

Особое внимание следует обратить на формулировку критерия оценки и условия, накладываемые на имеющиеся в системе сигналы.

Схема системы оптимальной фильтрации приведена на рис. 5.

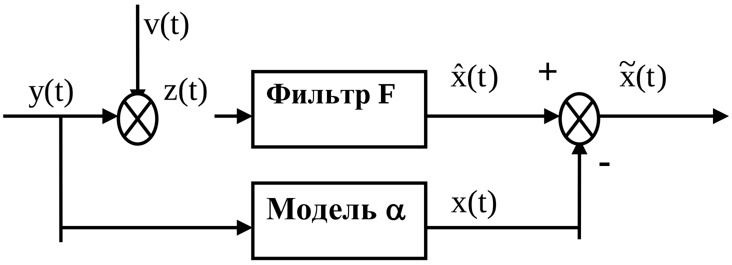


Рис. 5. Фильтр Винера

Здесь x, y, z, v, $\tilde{x}$ - скаляры, x(t) - желаемый сигнал, $\tilde{x}(t)$ - оценка сигнала, $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, v(t) – помеха, y(t) – оцениваемый сигнал, z(t) - оцениваемый сигнал с помехой.

Все сигналы и шумы – стационарные случайные процессы с известными статистическими свойствами.

Устанавливается критерий оптимальности – минимум среднеквадратичной ошибки

$$\min\left\{M\left[\tilde{x}^2(t)\right]\right\}$$

В задаче необходимо отыскать физически реализуемый фильтр, который преобразовывал бы выходной сигнал z(t) так, чтобы минимизировался бы $M\left[\tilde{x}^2(t)\right]$.

*Решение задачи.*

Обозначим $W_F(t)$ – весовую функцию фильтра F и $W_\alpha(t)$ – весовая функция модели $\alpha$ . Из теории линейных систем известно

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau) \cdot z(t-\tau) \cdot d\tau \ . \qquad (1)$$

Исключительно для простоты, положим $W_\alpha(t)=1$ так что x(t)=y(t).

Вывод начнем с разложения погрешности фильтрации $\tilde{x}(t)$ и замены в ней слагаемых через соответствующие весовые функции

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

и после усреднения (оценивания математического ожидания $M\left[\tilde{x}^2(t)\right]$).

$$\overline{\tilde{x}^2(t)} = \overline{\hat{x}(t)^2} - \overline{2\hat{x}(t)x(t)} - \overline{x(t)^2} \ . \qquad (2)$$

Проводим преобразования первого слагаемого

$$\hat{x}(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_1) \cdot z(t-\tau_1) \cdot d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_2) \cdot z(t-\tau_2) \cdot d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_1) \cdot d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_2) \cdot z(t-\tau_1) \cdot z(t-\tau_2) \cdot d\tau_2.$$

и, после усреднения

$$\overline{\hat{x}(t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_1) \cdot d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_2) \cdot \overline{z(t-\tau_1) \cdot z(t-\tau_2)} \cdot d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_1) \cdot d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_2) \cdot \Phi_{zz}(\tau_1-\tau_2) \cdot d\tau_2. \qquad (3)$$

В (3) $\Phi_{zz}(\tau_1-\tau_2)$ - корреляционная матрица, аргументом которой (в силу стационарности сигналов) является разность аргументов сомножителей корреляционных моментов $\overline{z(t-\tau_1) \cdot z(t-\tau_2)}$.

По аналогии второе и третье слагаемые имеют вид

$$\overline{\hat{x}(t) \cdot x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_1) \cdot \overline{z(t-\tau_1) \cdot y(t)} \cdot d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} w_F(\tau_1) \cdot \Phi_{yz}(\tau_1) \cdot d\tau_1, \qquad (4)$$

$$\overline{x(t)^2} = \overline{y(t)^2}. \qquad (5)$$

И далее задача сводится к поиску такой весовой функции $w_F(t)$, которая минимизировала бы ошибку $\overline{\hat{x}^2(t)}$.

Учитывая линейность фильтра, можно представить весовую функцию фильтра в виде двух слагаемых

$$W_F(t)=W_0(t)+\varepsilon \cdot W(t),$$

где $w_0(t)$ – искомая оптимальная весовая функция,

$w(t)$ – весовая функция, преобразующая помехи,

$\varepsilon$ - коэффициент.

Тогда, очевидно, минимум необходимо отыскивать при условии $\varepsilon = 0$ с тем, чтобы получить именно оптимальную весовую функцию.

Итак, необходимое условие минимума имеет вид

$$\left.\frac{\partial \overline{\tilde{x}^2}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

или

$$\left.\frac{\partial \overline{\hat{x}(t)^2}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} - \left.\frac{2\partial \overline{\hat{x}(t) x(t)}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0. \qquad (6)$$

Используя (3), получаем

$$\left.\frac{\partial\overline{\hat{x}(t)^2}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(w_0(\tau_1)+\varepsilon\cdot w(\tau_1)\right)\cdot d\tau_1\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(w_0(\tau_2)+\varepsilon\cdot w(\tau_2)\right)\cdot\Phi_{zz}(\tau_1-\tau_2)\cdot d\tau_2\right]\Bigg\|_{\varepsilon=0} = \qquad (7)$$

$$= 2\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}w(\tau_1)\cdot d\tau_1\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}w_0(\tau_2)\cdot\Phi_{zz}(\tau_1-\tau_2)\cdot d\tau_2+\delta$$

где δ - члены более высокого порядка.
И, используя (4), имеем

$$\left.\frac{\partial\overline{\hat{x}(t)\cdot x(t)}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}w(\tau_1)\cdot\Phi_{yz}(\tau_1)\cdot d\tau_1\ . \qquad (8)$$

Подставляем (7) и (8) в (6):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}w(\tau_1)\cdot\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}w_0(\tau)\cdot\Phi_{zz}(\tau_1-\tau)\cdot d\tau-\Phi_{yz}(\tau_1)\right]\cdot d\tau_1=0\,.$$

Так как w(τ), вообще говоря, произвольна, то необходимое условие минимума принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}w_0(\tau)\cdot\Phi_{zz}(t-\tau)\cdot d\tau-\Phi_{yz}(t)=0.. \qquad (9)$$

Уравнение (9) называют уравнением Винера-Хопфа. В нем корреляционные матрицы $\Phi_{zz}$ и $\Phi_{yz}$ известны из условий задачи. Следует отыскать оптимальную весовую функцию $w_0(\tau)$, что, вообще говоря, и обеспечивает желаемую фильтрацию.

***Задача прогнозирования.***

Проблемам прогнозирования, предсказания человек всегда уделял повышенное внимание. Мы не будем здесь рассматривать вопросы качественного прогнозирования. В литературе описано достаточно много различных количественных методов экстра- и интерполяции. Подробно и достаточно полно описаны условия их применения. Далее мы рассмотрим один такой метод. Его отличие от других состоит в том, что в тех весьма простых условиях его применимости он обладает максимально возможной точностью прогнозирования.

Метод этот называется именем академика Андрея Николаевича Колмогорова. Сам же автор обозначил его как метод экстраполяции и интерполяции случайных последовательностей.

Прогнозируемый случайный процесс x(t) – это стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием ($M_x$=0), единичной дисперсией ($D_x$=1) и ненулевой корреляцией $r_x(\tau)$. Это достаточно просто выполняемые условия (за исключением корреляции) – известны из теории вероятностей операции центрирования и нормирования. Если же прогнозу подвергается некоррелированный случайный процесс, то известно, что наиболее точным прогнозом является математическое ожидание.

Как таковое прогнозирование (ниже рассматривается задача экстраполяции) состоит в вычислении прогнозного значения посредством полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot x(t-j)\,, \qquad (10)$$

где $a_j$ – прогнозируемые коэффициенты,

m –длина предыстории.

Для работы с полиномом (10) необходимо воспользоваться m предыдущими значениями случайного процесса, которые носят название предыстории.

Теперь необходимо определить способ исчисления коэффициентов $a_j$. Их может быть много, но А.Н. Колмогоровым наилучшим в смысле достижения максимально возможной точности прогнозирования в случае среднеквадратического критерия оценки точности прогнозирования предложен и доказан следующий метод.

Коэффициенты $a_j$ определяются посредством решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot r(q-j) = r(q), \quad q = 1,2,\ldots,m \qquad (11)$$

или в более привычной форме

$$\begin{cases} a_1 \cdot r(0) + a_1 \cdot r(-1) + a_2 \cdot r(-2) + \ldots + a_m \cdot r(1-m) = r(1) \\ a_1 \cdot r(1) + a_2 \cdot r(0) + a_3 \cdot r(-1) + \ldots + a_m \cdot r(2-m) = r(2) \\ \ldots \\ a_1 \cdot r(m-1) + a_2 \cdot r(m-2) + a_3 \cdot r(m-3) + \ldots + a_m \cdot r(0) = r(m). \end{cases}$$

В силу стационарности процесса x(t) справедливо $r(\tau)=r(-\tau)$.

Качество прогнозирования оценивается среднеквадратичным критерием

$$\varepsilon^2 = M\left[\left(\hat{x}(t) - x(t)\right)^2\right].$$

Не вызывает возражений и роль длины предыстории как параметра, управляющего точностью прогнозирования – с увеличением его повышается и точность предсказания.

Решение задачи интерполяции в принципе не отличается от выше изложенной экстраполяции. Разница лишь в том, что в качестве предыстории используются как предыдущие, так и последующие значения.

### 8.3. Задача идентификации.

Настоящий класс математических моделей, так же как и оценивание сигналов, обеспечивает решение задач анализа в исследовании систем.

Схема задачи представлена на рис. 6.

Исследователю известны статистические описания шумов w(t) и v(t), динамическое соотношение, описывающее измеритель (между x(t), v(t) и z(t)) и зафиксированы наблюдения за управляющим сигналом u(t) и измеренным выходом z(t).

Необходимо определить наилучшую в некотором смысле оценку характеристики объекта (динамическое соотношение между w(t), u(t) и x(t)).

Существующая и достаточно сильно развитая теория идентификации обеспечивает не только успешное решение этого класса прикладных задач, но и дает возможность исследования дополнительных, важных свойств объекта, таких как идентифицируемость, управляемость и т.д.

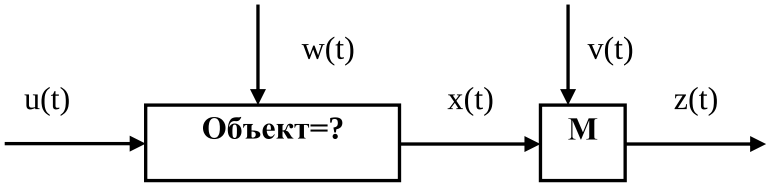


Рис. 6. Идентификация

С точки зрения многих прикладных задач проблема определения соотношения между величинами может быть решена и посредством регрессионного анализа.

Рассмотрим суть этого статистического метода.

Пусть в распоряжении исследователя есть N пар наблюдений ($u_j$, $x_j$), где $u_j$ – входной сигнал (в нашем случае - управляющий) и $x_j$ – выходной сигнал (выход объекта).

Кстати, отметим, что, зная измеренный выход z(t) и соотношение, описывающее измеритель, мы по этому соотношению можем вычислить выход объекта x(t).

Совокупность пар ($u_j$, $x_j$) образует так называемое облако точек (рис. 7).

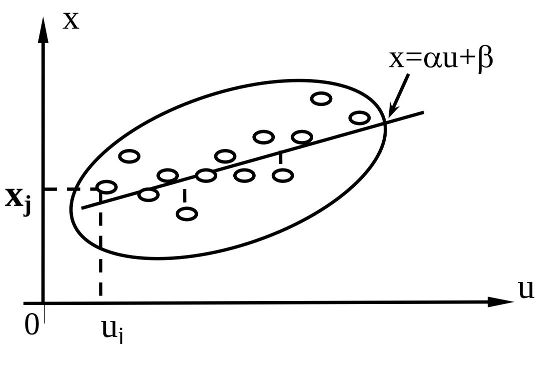


Рис. 7. Облако точек

Визуальный анализ этого облака точек, или, что предпочтительнее, исходя из физического смысла объекта исследования, можно предположить, что наилучшим описанием зависимости между $u_j$ (независимая переменная) и $x_j$ (зависимая переменная) будет некоторая функция x=f(u). Под наилучшим описанием может пониматься, например, минимум среднеквадратичной погрешности.

Если функция f – линейная, то мы имеем дело с линейным регрессионным анализом, в противном случае – с нелинейным.

Пусть кривая регрессии представляет собой полином порядка n

$$x = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot u^j$$

Для того, чтобы найти коэффициенты регрессии воспользуемся так называемой системой нормальных уравнений, техника составлений которых весьма проста:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^o + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^1 + \ldots + a_n \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^n = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \cdot u_i^o \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^1 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^2 + \ldots + a_n \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \cdot u_i^1 \\ \ldots \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^n + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^{n+1} + \ldots + a_n \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^{2n} = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \cdot u_i^n \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, мы найдем регрессионные коэффициенты $a_j$, j=0,1,...,n.

В случае линейной регрессии $x=\alpha \cdot u+\beta$ коэффициент регрессии имеет вид

$$\alpha = \frac{S_x}{S_u} \cdot \bar{r}_{xu},$$

а свободный член

$$\beta = \bar{x} - \frac{S_x}{S_u} \cdot \bar{r}_{xu} \cdot \bar{u},$$

где $\bar{x}$, $\bar{u}$ - оценки средних зависимой и независимой переменных,

$S_x$, $S_u$ – среднеквадратические отклонения зависимой и независимой переменных,

$\bar{r}_{xu}$ - оценка коэффициента корреляции между зависимой и независимой переменными.

Мы рассмотрели достаточно универсальный метод решения задачи регрессионного анализа – системы нормальных уравнений. Он положен в основу большинства соответствующих программных средств. При этом следует отметить, что эти средства предоставляют пользователю не только числовые значения регрессионных коэффициентов, но и большой объем дополнительной информации – доверительные границы, уровни значимости, при которых принимаются гипотезы о значимости коэффициентов регрессии и т. д.

Ясно, что практические задачи могут быть таковы, что уравнение регрессии не имеет вид полинома. В этом случае может быть использован прием линеаризации. Суть его состоит в сведении нелинейной регрессионной зависимости к линейной, нахождении для нее коэффициентов регрессии и реализации обратного перехода.

Пусть, для примера, из физических представлений об объекте исследователь считает, что облако точек достаточно точно должно описываться показательной зависимостью

$x = a \cdot e^{-bu}$.

***Прологарифмируем обе части соотношения***

$Ln(x) = Ln(a) - b \cdot u$

и введем новые обозначения

$x' = \beta - b \cdot u$

Далее известными способами найдем коэффициент регрессии b и свободный член β этой линейной регрессии. (При этом необходимо провести перерасчет зависимой переменной $x' = Ln(x)$).

Затем производим пересчет свободного члена β по формуле

$a = e^{\beta}$.

Конечно, операция линеаризации не всегда возможна. Как правило, она распространяется на показательные и обратные функции.

Теория вероятностей и математическая статистика – это те учебные дисциплины, которые создают основу для решения задачи идентификации посредством регрессионного анализа.

## 8.4. Задача стохастического управления.

Схема задачи представлена на рис. 8

Здесь даны статистические описания помех w(t) и v(t), динамические соотношения,

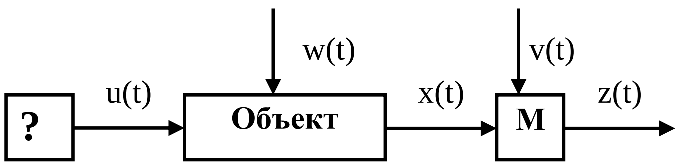


Рис. 8. Стохастическое управление

описывающие объект (зависимости между u(t), w(t) и x(t)) и измеритель (зависимости между x(t), v(t) и z(t)).

Необходимо найти такое уравнение u(t), чтобы некоторая оценка выходного сигнала объекта x(t) или измеренного сигнала z(t) была бы как можно ближе к желаемым значениям $x^*(t)$ или $z^*(t)$.

Определение управления u(t) в зависимости от z(t) приводит к задаче стохастического управления.

Отличие данной задачи от задачи детерминированного управления состоит в одном – на объект и измеритель воздействуют помехи. Это в существенной мере усложняет задачу.

В самых общих чертах аналитические и численные методы решения как задачи детерминированного, так и стохастического управления весьма похожи. Соответствующая литература дает наглядное представление о том, насколько сложны эти методы при необходимости учета помех – следует учесть и законы распределения вероятностей, и корреляционные свойства случайных воздействий. Это приводит к существенному снижению и усложнению разнообразия как аналитических, так и численных методов решения задачи стохастического управления и, соответственно, сужает множество реально решаемых прикладных задач.

Подробности практики таковы, что требуется исследовать не просто сложные и очень сложные системы, а именно стохастические системы. И недостаточное развитие аналитических методов изучения приводит к необходимости использования специального инструментария. Он должен обеспечивать возможность соединения разнородных математических описаний и обязательно максимально учитывать стохастические составляющие системы. И такого рода инструментарий, носящий название имитационного моделирования, рассматривается нами далее.

### 8.5. Задача адаптивного управления.

Схема задачи имеет вид (рис. 9).

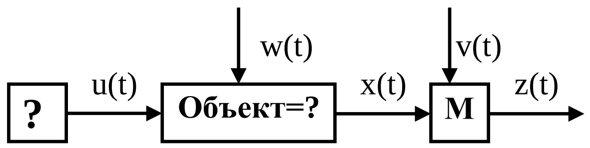


Рис. 9. Адаптивное управление

Исходные данные для этой задачи такие же, как и в задаче идентификации – статистические описания помех w(t) и v(t), динамическое соотношение, описывающее измеритель (соотношение между x(t), v(t) и z(t)) и зафиксированные управляющий сигнал u(t) и измеренный выход z(t).

Необходимо определить такое управление u(t), и одновременно, такое динамическое соотношение, описывающее объект, для которого оценка выходного сигнала x(t) была бы как можно ближе к желаемой.

Данная задача является наиболее сложной из всех ранее рассмотренных. Связано это с тем, что необходимо не только отыскать такое управление u(t), чтобы выход объекта x(t) или измеренный его выход z(t) стремились к желаемым, но и соответствующим образом оценить сам объект, то есть найти динамическое соотношение, описывающее взаимосвязь между u(t), w(t) и x(t).

В рамках данной задачи рассматриваются три подзадачи: обучения, самообучения и адаптации.

В подзадаче обучения имеют место две системы – обучающая и обучаемая. Обучающая система формирует способ передачи информации, контролирует верность ее восприятия обучаемой системой и вводит корректирующее воздействие, направленное на достижения эффективного восприятия и переработки информации. В качестве примера можно сослаться на известный и понятный пример школьного либо вузовского образования.

Подзадача самообучения характерна тем, что обучаемая и обучающая системы представляют собой единое целое. Пример, когда самостоятельно изучают тот или иной вопрос, достаточно полно иллюстрирует самообучение. Вы сами определяете, по каким источникам, в какой последовательности и как изучать материал, сами контролируете его усвоение и сами вносите корректировки в процесс обучения.

Адаптация – это самообучение с возможностью изменения структуры самой системы – набора элементов и взаимосвязей между ними. В качестве примера приведем ящерицу, которая теряет свой хвост. Эта живая система после самооценки ситуации (самообучения) подключает ранее законсервированные элементы и связи в результате чего регенерируется утраченный орган и затем, по завершении этого действия, элементы и связи регенерации отключаются (адаптация).

В литературе, в частности, в работах Я.З. Цыпкина Вы найдете описания проблем построения и конкретные алгоритмы для систем с обучением, самообучением и адаптацией. Следует сказать, что сложность задачи обусловила ограниченность существующего набора методов и еще большую, практически близкую к нулю, ограниченность примеров систем с адаптацией.

Примеры же систем с обучением и самообучением имеются (см. работы Я.З. Цыпкина). Те из них, которые относятся к автоматизированным системам обработки информации и управления приводятся при чтении курсов «Информационные технологии», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и другие.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Аналитические методы.
2. Численные методы.
3. Задачи фильтрации и оценки.
4. Задача прогнозирования.
5. Задача идентификации.
6. Стохастическое управление.
7. Адаптивное управление.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Основная*


1. **Гроп Д.** Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
2. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
3. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. –М.: Финансы и статистика, 2006.
4. **Сейдж А., Мелса Дж.** Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.
5. **Советов Б.Я., Яковлев С.А.** Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## Библиографический список


1. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Наука, - 1997.
2. Гроп Д. Методы идентификации систем управления. – М.:Мир, 2001.
3. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ.–М.,Мир, 2006.
4. Информационные системы в экономике//Под ред. В.П.Божко, В.В.Брага и др. – М.: Финансы и статистика, 2006.
1. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. - Вып. 1, 2. - М.: Статистика, 1998.
2. Математические модели информационных процессов и управления. –М.: Недра, 2001г.
3. Михалевич В.С., Волков В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования систем. - М.: Наука, 2003.
4. Сейдж А., Мелса Дж. Идентификация систем. – М.:Наука, 2004.
5. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001.
6. Ушаков И.А. Обобщенные показатели при исследовании сложных систем. - М.: Знание, 2005.
7. Хартман К., Лецкий Э., Шефер В. и др. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. – М., Мир, 1997.
8. Химмельблау Д, Анализ процессов статистическими методами. – М., Мир, 2003.
9. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука, 2004.
10. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука. - М.: Мир, 1998.
11. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.–М.:Мир, 2005.

## СОДЕРЖАНИЕ

**Введение**………………………………………………………………………….……….3
**Лекция 1. Основные понятия о моделях и методах их построения..**…….………….....4
Вопросы для самоконтроля……………………………………………….........................9
Список литературы……………………………………………………………………….…..9
**Лекция 2. Физические и математические модели**………………………………….....10
Вопросы для самоконтроля…………………………………………….............................12
Список литературы………………………………………………………………………….12
**Лекция 3. Математические модели объектов идентификации** ………………...…...14
Вопросы для самоконтроля……………………………………………………................16
Список литературы…………………………………………………………………………17
**Лекция 4. Критерий идентификации** ……….................................................................18
Вопросы для самоконтроля ……………………………………………………………19
Список литературы…………………………………………………………………………19
**Лекция 5. Общие задачи статистической идентификации**…….…………………......20
Вопросы для самоконтроля……………………………………………….........................24
Список литературы…………………………………………………………………………25
**Лекция 6. Параметрическая идентификация объектов**……………………………... 26
Вопросы для самоконтроля………………………………………………….....................30
Список литературы…………………………………………………………………………30
**Лекция 7. Методы статистической идентификации.**…….…………….......................31
Вопросы для самоконтроля…………………………………………………….................33
Список литературы…………………………………………………………………………33
**Лекция 8. Математические модели и системы управления**…………………………34
8.1. Детерминированное управление……………………………………………………35
8.2. Задачи оценки…………………………………………………………………………...38
8.3. Задачи фильтрации……………………………………………………………………...43
8.4. Задача стохастического управления…………………………………………………..46
8.5. Задача адаптивного управления……………………………………………………..47
Вопросы для самоконтроля…………………………………………….............................48
Список литературы…………………………………………………………………………48
**Библиографический список**…………………………………………….........................50
**Содержание**………………………………………………………...…………………….51