

**Министерство сельского хозяйства Российской Федерации**  
**Федеральное государственное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Саратовский государственный аграрный университет**  
**имени Н. И. Вавилова»**

## **Инженерная и компьютерная графика**

### **ЧАСТЬ I**

**краткий курс лекций**

**для студентов I курса**

Направление подготовки  
**19.03.02 Продукты питания из растительного сырья**

Профили подготовки

**Технология хранения и переработки зерна**

**Технология хлеба, кондитерских и макаронных изделий**

**Саратов 2015**

УДК 514.18  
ББК 22.151.3  
Г37

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры ПАПП  
Энгельского технологического института (филиала) СГТУ

В.М. Седелкин

профессор кафедры «Автоматизация и оборудование пищевых предприятий»  
ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ»

А.К. Свириденко

Г37 **Инженерная и компьютерная графика. Часть I:** Краткий курс лекций для студентов I курса специальности (направления подготовки) 260100 «Продукты питания из растительного сырья» и профилей подготовки: «Технология хранения и переработки зерна», «Технология хлеба, кондитерских и макаронных изделий»/ Сост.: А.В. Анисимов, Д.А. Скотников // ФГБОУ ВО Саратовский ГАУ. – Саратов, 2015. – 88 с.

Краткий курс лекций по дисциплине «Инженерная и компьютерная графика» составлен в соответствие с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки 19.03.02 «Продукты питания из растительного сырья» и профиля подготовки «Технология хранения и переработки зерна».

Краткий курс лекций содержит теоретический материал по основным вопросам инженерной графики. Он направлен на формирование у студентов знаний правил оформления конструкторской документации в соответствии с ЕСКД, на применение этих знаний при выполнении и чтении чертежей и другой конструкторской документации в среде современных компьютерных систем.

УДК 514.18  
ББК 22.151.3

© Анисимов А.В., 2015

© Скотников Д.А., 2015

© ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ», 2015

## Введение.

Знание инженерной графики является фундаментом, на котором базируется инженерное образование и инженерное творчество. Теоретические предпосылки инженерной графики основаны на положениях начертательной геометрии. А, современные методы разработки новой техники для создания конкурентоспособных изделий немислимы без подготовки инженера, способного работать с чертежами в среде современных компьютерных систем с использованием безбумажной технологии.

Краткий курс лекций по дисциплине «Инженерная и компьютерная графика» составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки 260100 «Продукты питания из растительного сырья» и профилей подготовки «Технология хранения и переработки зерна», «Технология хлеба, кондитерских и макаронных изделий».

Начертательная геометрия – наука о пространстве и пространственных объектах, о методах построения изображений пространственных форм на плоскости.

Потребность в изображении трехмерных форм на плоскости по законам геометрии возникла из практических задач строительства, изобразительного искусства и техники. Начертательная геометрия оказала влияние на разработку основ целых направлений в математике, физике, архитектуре и др.

Среди общетехнических и специальных дисциплин, изучаемых студентами инженерных специальностей, курс начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики занимает особое положение не только потому, что этот предмет необходим специалистам любого технического профиля и не только потому, что без знания основ построения и оформления чертежа трудно рассчитывать на успешное освоение всего цикла специальных дисциплин. Этот курс является первым из учебных предметов, который должен начать формирование у будущего инженера профессионального интереса к своей будущей деятельности. Профессиональный интерес способствует успешному развитию логики технического мышления, стремлению к творчеству, рациональному поиску нового, совершенствованию в области технических наук.

Курс нацелен на формирование ключевых компетенций, необходимых для эффективного решения профессиональных задач и организации профессиональной деятельности на основе глубокого понимания стандартов, технических условий и других нормативных документов.

## Лекция 1

### ЗАДАНИЕ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ МОНЖА.

#### 1.1. Метод проецирования

Метод проецирования является основным методом начертательной геометрии. Проекция предмета на плоскости является его изображением на плоскости с помощью проецирующих лучей. А так как любой предмет можно представить совокупностью множества точек, то проецирование его сведется к построению проекций отдельных точек.

Сущность проецирования заключается в том, чтобы через заданные точки мысленно проводились проецирующие лучи до пересечения их с какой-либо плоскостью. Точки пересечения проецирующих лучей на этой плоскости и называются проекциями заданных точек. В зависимости от способа проведения проецирующих лучей различают центральное и параллельное проецирование.

##### 1.1.1. Центральные проекции и их основные свойства

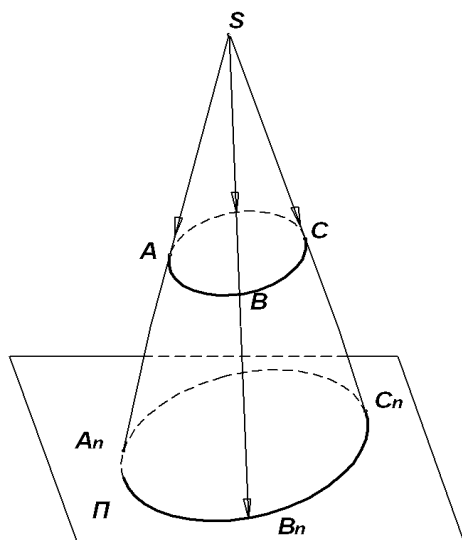


Рисунок 1.1.

При центральном (коническом, полярном) проецировании проецирующие лучи выходят из одной и той же точки  $S$ , называемой центром (полюсом) проекций (Рис. 1.1.). Например, для построения кривой, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , выбирается произвольная плоскость проекций  $\Pi$  и через заданные точки кривой  $A$ ,  $B$ ,  $C$  проводятся проецирующие прямые до пересечения с плоскостью  $\Pi$ . Полученные точки  $A_{\pi}$ ,  $B_{\pi}$ ,  $C_{\pi}$  кривой являются центральными проекциями исходного геометрического образа, а образованная коническая поверхность объясняет второе название вида проецирования.

Центральное проецирование обладает следующими основными свойствами:

- 1) проекция точки является точкой;
- 2) проекция прямой – в общем случае, тоже прямая линия;
- 3) если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой же прямой;
- 4) точка пересечения прямых проецируется в точку пересечения их проекций.

##### 1.1.2. Параллельные (цилиндрические) проекции и их основные свойства

Если принять, что центр проекций точка  $S$  находится в бесконечности, то проецирующие прямые будут параллельными между собой. Для их построения задают направление проецирования  $s$  (Рис. 1.2.).

Такой вид проецирования называется параллельным, а точки кривой  $A_n, B_n, C_n$  пересечения проецирующих прямых с плоскостью проекций  $\Pi$  - параллельными проекциями точек кривой  $A, B, C$ . Образованная при проецировании цилиндрическая поверхность объясняет второе название вида проецирования.

В зависимости от угла, образованного направлением проецирования с плоскостью проекций, различают прямоугольное (ортогональное) и косоугольное параллельное проецирование.

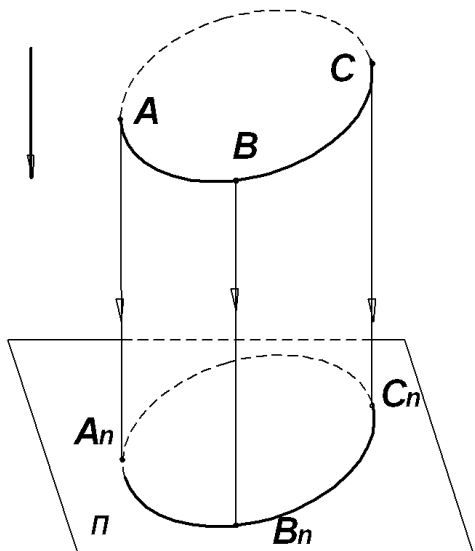


Рисунок 1.2.

## 1.2. Инвариантные свойства центрального проецирования

Параллельное проецирование является частным случаем центрального проецирования, а, следовательно, частично сохраняет и инвариантные свойства последнего. Инвариантными (неизменяющимися) свойствами называются свойства геометрических элементов, которые при проецировании сохраняются и в проекциях. Параллельное проецирование обладает следующими основными свойствами:

- 1) проекция точки на плоскость есть точка;
- 2) проекция прямой в общем случае является прямой (Рис. 1.3);

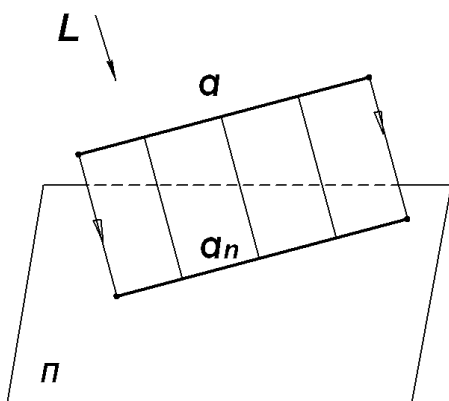


Рисунок 1.3.

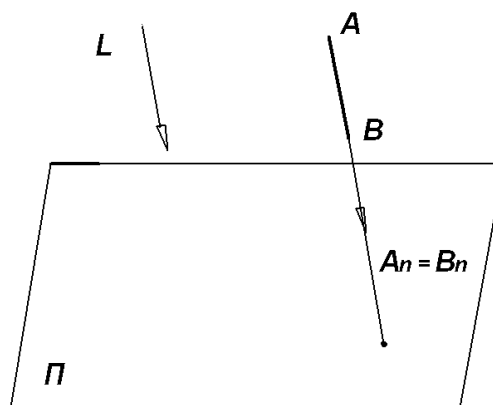


Рисунок 1.4.

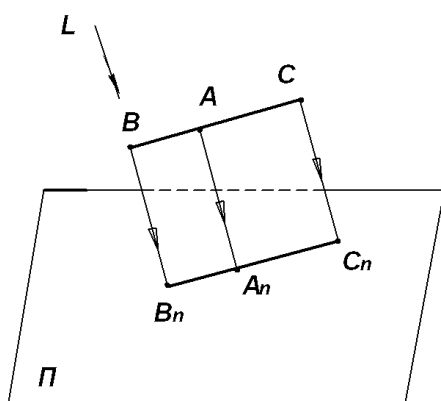


Рисунок 1.5.

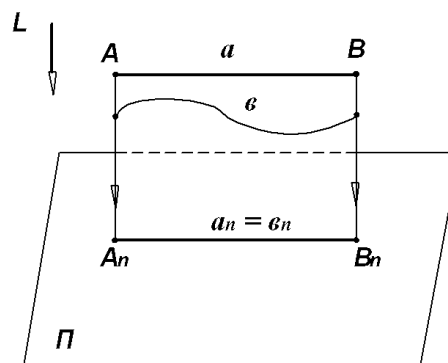


Рисунок 1.6.

- 3) проекцией прямой, параллельной направлению проецирования, является точка (Рис. 1.4.), она называется вырожденной проекцией;
- 4) если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой (Рис. 1.5.);
- 5) прямая может быть проекцией не только прямой, но и любой кривой, если последняя находится в проецирующей плоскости (Рис. 1.6.);
- 6) если отрезок прямой параллелен плоскости проекции, то его проекция на эту плоскость равна натуральной величине отрезка (Рис. 1.7.);

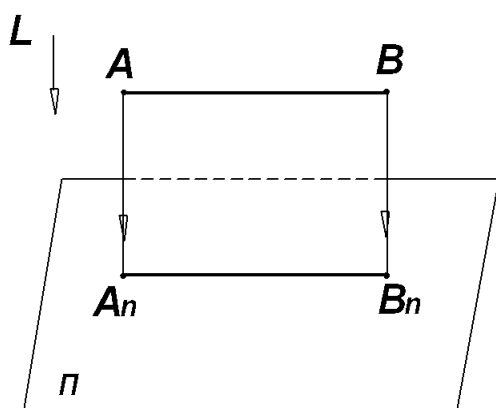


Рисунок 1.7.

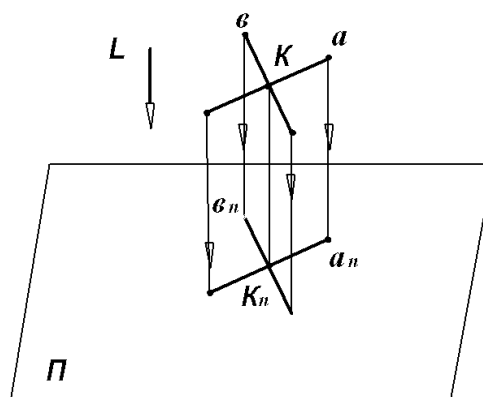


Рисунок 1.8.

- 7) точка пересечения прямых проецируется в точку пересечения их проекций (Рис. 1.8.);
- 8) отношение отрезков прямой равно отношению их проекций (Рис. 1.5.);

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_n B_n}{A_n C_n}$$

- 9) проекции параллельных прямых параллельны (Рис. 1.9.);

$$A_n B_n \parallel C_n D_n$$

- 10) отношение отрезков параллельных прямых равно отношению их проекций (Рис. 1.10.).

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_n B_n}{C_n D_n}$$

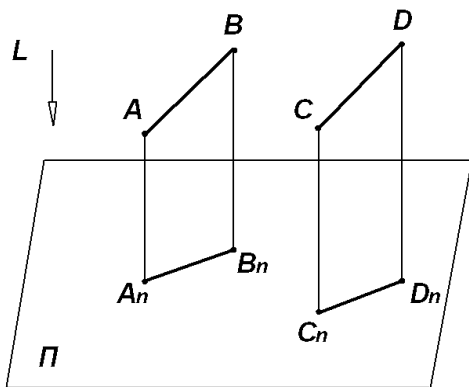


Рисунок 1.9.

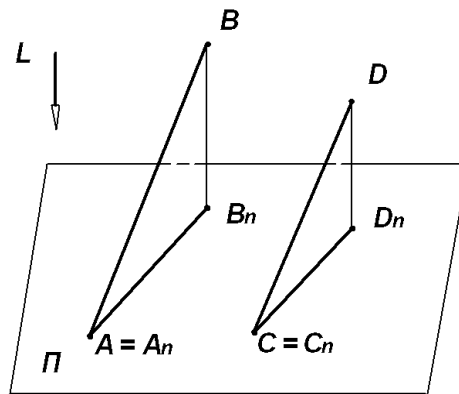


Рисунок 1.10.

Рассмотренные свойства (инварианты) параллельного проецирования сохраняются при любом направлении проецирования.

Очевидно, что как при центральном, так и при параллельном проецировании, каждая точка пространства имеет на плоскости  $\Pi$  одну проекцию.

Но одна проекция точки не определяет ее положения в пространстве, так как может быть проекцией любой точки, принадлежащей проецирующей прямой. Так, точка  $A_n$  (Рис. 1.1.) может быть проекцией любой точки, принадлежащей прямой  $SA$ ; проекция  $[A_n B_n]$  (Рис. 1.6.) может быть проекцией любой прямой или кривой, принадлежащей проецирующей плоскости. Следовательно, одна проекция геометрического образа не позволяет мысленно воссоздать его пространственную форму и размеры, т. е. однопроекционный чертеж является необратимым.

Для полной обратимости чертежа в 1798 г. французский ученый Гаспар Монж предложил осуществлять параллельное, прямоугольное проецирование на две или три взаимно перпендикулярные неподвижные плоскости проекций, чтобы чертеж геометрического образа содержал не менее двух проекций каждой его точки. Ортогональное проецирование (направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций), являясь частным случаем параллельного, значительно упрощает построение проекций. Метод Монжа и по настоящее время является основным методом составления технических чертежей.

### 1.3 Комплексный чертеж точки

#### 1.3.1. Проецирование точки на две плоскости проекций

На рис. 1.11. изобразим систему из двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, одна из которых ( $\Pi_1$ ) - расположена горизонтально, а вторая ( $\Pi_2$ ) - вертикально. Где  $\Pi_1$  - горизонтальная плоскость проекций,  $\Pi_2$  - фронтальная плоскость проекций,  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  - оси проекций. Это система  $\Pi_2/\Pi_1$ .

Внутри двугранного угла, образованного плоскостями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , помещена некоторая точка  $A$ , из которой опущены перпендикуляры (проецирующие лучи) на плоскость  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  до пересечения с ними в точках  $A_1$  и  $A_2$  ( $A_1$  и  $A_2$ , соответственно, горизонтальная и фронтальная проекция точки  $A$ ).

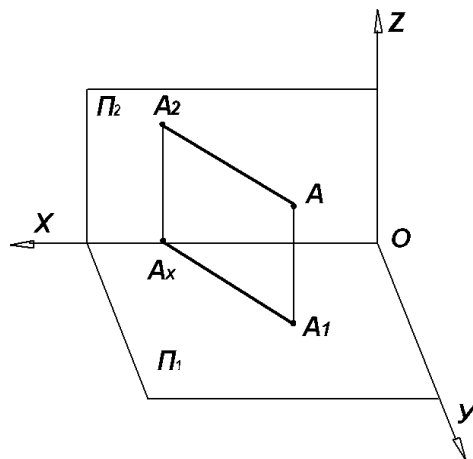


Рисунок 1.11.

Проецирующая плоскость  $AA_2A_xA_1$  перпендикулярна как к плоскости  $\Pi_2$ , так и к плоскости  $\Pi_1$ . Следовательно, она перпендикулярна и к линии их пересечения - оси проекций  $OX$ . Следовательно, прямые  $A_2A_x$  и  $A_1A_x$  перпендикулярны к оси  $OX$ , т. е. фронтальная и горизонтальная проекции точки находятся на перпендикуляре к оси проекций  $OX$ , пересекающего её в одной и той же точке (точке  $A_x$ ). Расстояние  $|AA_1|$  точки  $A$  до плоскости  $\Pi_1$  называется высотой точки  $A$ , а её расстояние  $|AA_2|$  до плоскости  $\Pi_2$  - глубиной точки  $A$ . Пространственная модель плоскостей проекций неудобна для практического использования, поэтому повернём плоскость проекций  $\Pi_1$  вокруг оси  $OX$  на угол  $90^\circ$  до совмещения с плоскостью проекций  $\Pi_2$ . При этом фронтальная проекция точки  $A$  не изменит своего положения, а горизонтальная будет находиться под осью  $OX$  на одной прямой с фронтальной проекцией точки - на одной линии проекционной связи, перпендикулярной к оси проекций  $OX$ .

Комплексное изображение двух проекций точки, полученное после поворота плоскости проекций  $\Pi_1$  на угол  $90^\circ$  до совмещения с плоскостью проекций  $\Pi_2$ , называется эшюром Монжа или комплексным чертежом.

Но так как плоскости, в том числе и плоскости проекций, безграничны, то комплексный чертеж некоторой точки  $A$  в системе  $\Pi_2/\Pi_1$  будет выглядеть так, как показано на рис. 1.12. (где  $A_2A_x$  - расстояние от точки  $A$  до плоскости проекций  $\Pi_1$ ;  $A_1A_x$  - расстояние от точки  $A$  до плоскости проекций  $\Pi_2$ ). Значит проекции точки на две плоскости определяют её положение в пространстве, т.е. чертеж точки является обратимым - позволяет по нему однозначно восстановить действительную форму изображения и его положение.

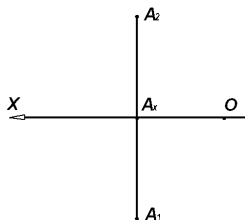


Рисунок 1.12.

### 1.3.2. Проецирование точки на три плоскости проекций

Часто для выявления более полной информации о форме и размерах предмета строят не две, а три его проекции. Для этого систему  $\Pi_2/\Pi_1$  дополним третьей плоскостью проекций  $\Pi_3$ ,

перпендикулярной как к плоскости проекций  $\Pi_2$ , так и к плоскости проекций  $\Pi_1$  (Рис. 1.13.). Плоскость  $\Pi_3$  - профильная плоскость проекций. Это система  $\Pi_1 / \Pi_2 / \Pi_3$ . Линии пересечения  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  - оси проекций, точка  $O$  - точка пересечения осей проекций.

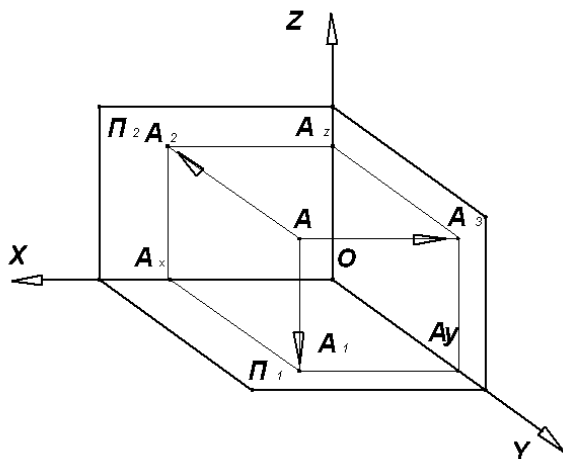


Рисунок 1.13.

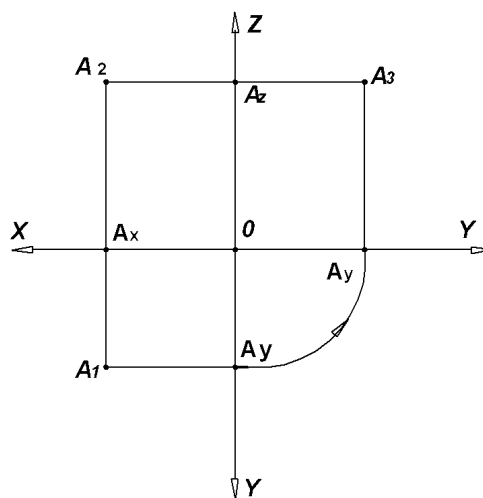


Рисунок 1.14.

На рис. 1.13. покажем построение проекций точки  $A$  в системе  $\Pi_1 / \Pi_2 / \Pi_3$  т. е. на три плоскости проекций. Где проекция  $A_3$  - профильная проекция точки  $A$ .

Совместив плоскости проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  с плоскостью проекций  $\Pi_2$  поворотом каждой из них на угол  $90^\circ$ , получим комплексный чертёж точки  $A$  в системе  $\Pi_1 / \Pi_2 / \Pi_3$  (Рис. 1.14.). Расстояние  $A_y A_1$  точки  $A$  до плоскости  $\Pi_3$  называется шириной точки  $A$ .

Появление на комплексном чертеже двух осей  $OY$ , объясняется тем, что ось  $OY$  при совмещении плоскостей проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  с плоскостью  $\Pi_2$  как бы раздвоилась - одна её часть ушла вниз с плоскостью  $\Pi_1$ , а вторая вправо с плоскостью  $\Pi_3$ .

На комплексном чертеже фронтальная и горизонтальная проекции точки лежат на одной вертикальной линии проекционной связи, которая перпендикулярна оси  $OX$ , фронтальная и профильная проекции точки лежат на одной горизонтальной линии проекционной связи, которая перпендикулярна к оси проекций  $OZ$ , причём профильная проекция точки находится на таком же расстоянии от оси  $OZ$ , как и горизонтальная проекция точки от оси  $OX$ . Следовательно, по двум заданным проекциям точки можно построить её третью проекцию, пользуясь линиями проекционной связи между проекциями точки на комплексном чертеже.

#### 1.4. Комплексный чертёж точек, расположенных в четвертях пространства

Плоскости проекций  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$  при их продлении образуют четыре двугранных угла (Рис. 1.15.) - четыре четверти (квadrанта), обозначение которых показано на виде  $A$  (Рис. 1.16.) против часовой стрелки.

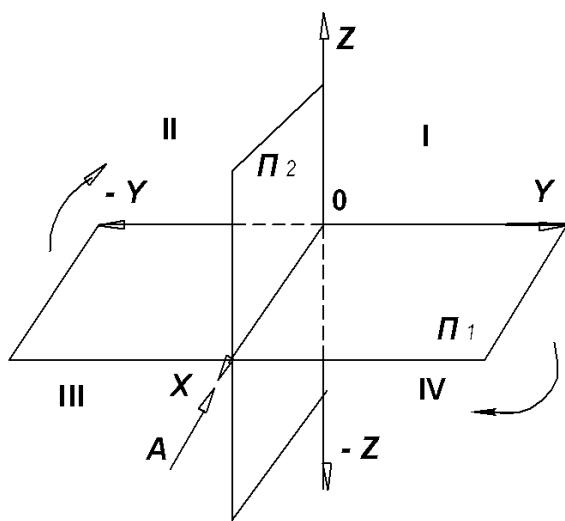


Рисунок 1.15.

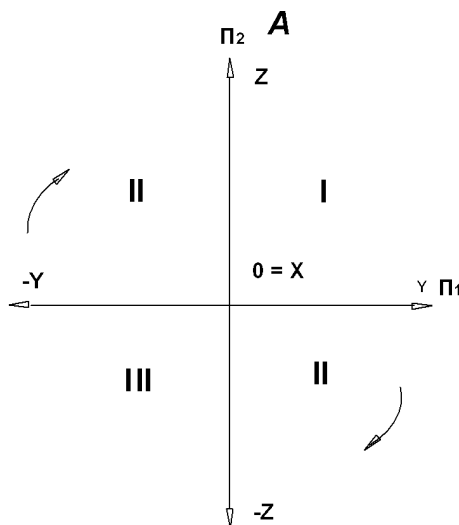


Рисунок 1.16.

Ось проекций делит каждую из плоскостей проекций на две полуплоскости - полы: плоскость проекций  $\Pi_1$  на переднюю и заднюю полы, плоскость проекций  $\Pi_2$  на верхнюю и нижнюю полы.

При переходе от пространственного изображения к комплексному чертежу, т. е. при совмещении горизонтальной плоскости проекций с фронтальной, передняя полая плоскости  $\Pi_1$  будет перемещаться на угол  $90^\circ$  вокруг оси  $OX$  вниз, а задняя - вверх.

На рис. 1.17. и 1.18. показаны пространственные изображения и комплексные чертежи точек  $A, B, C, D$ , находящихся в различных четвертях пространства: точка  $A$  находится в первой четверти,  $B$  - во второй и т. д.

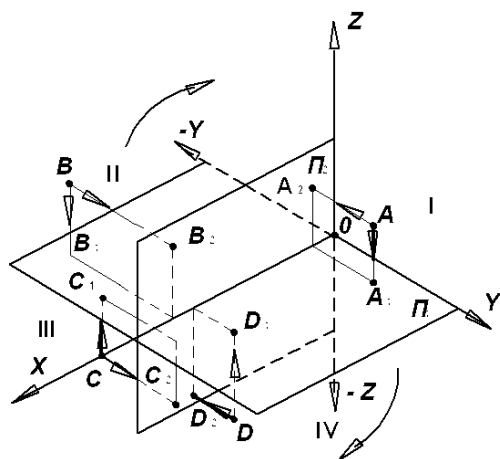


Рисунок 1.17.

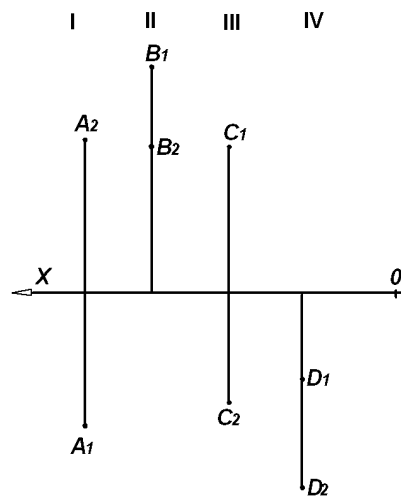


Рисунок 1.18.

Характерным признаком точки  $A$ , находящейся в первой четверти будет расположение ее горизонтальной проекции  $A_1$  ниже оси  $OX$ , а фронтальной  $A_2$  выше оси  $OX$

на комплексном чертеже. Для точки С, расположенной в третьей четверти – наоборот.

Четверти между собой симметричны относительно: плоскости  $\Pi_1$  - I и IV; II и III; относительно плоскости  $\Pi_2$  - I и II; III и IV; относительно оси X - I и III; II и IV.

Продлить можно также и плоскость проекций  $\Pi_3$ . Пересекаясь, плоскости проекций  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  образуют восемь трёхгранных углов - восемь октантов (Рис. 1.19).

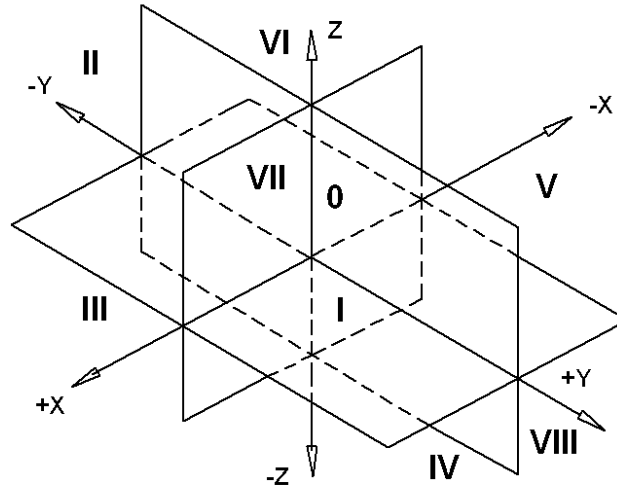


Рисунок 1.19.

### 1.5. Построение проекций точки по её прямоугольным координатам

Точка в пространстве может быть определена не только её проекциями, но и прямоугольными (декартовыми) координатами.

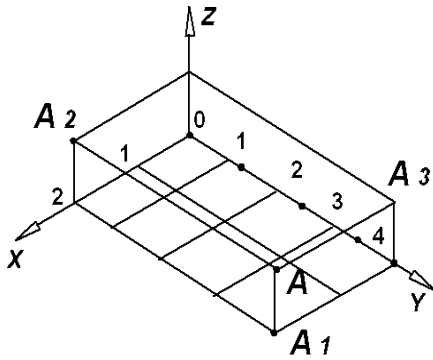


Рисунок 1.20.

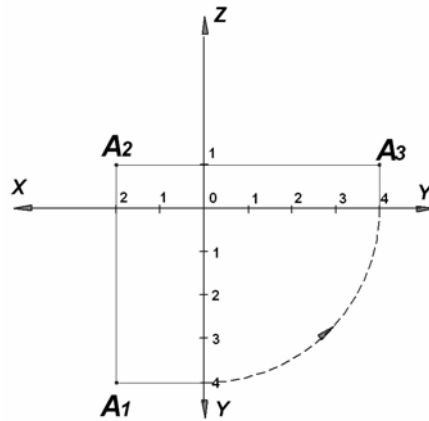


Рисунок 1.21.

Известно, что координаты какой-либо точки - это числа, выражающие её расстояние от трёх взаимно перпендикулярных плоскостей, называемых плоскостями координат.

Построим в пространстве точку А по её координатам X, Y, Z - 2, 4, 1 (Рис. 1.20.). Приняв оси и плоскости координат за оси и плоскости проекций, легко заметить, что абсцисса точки (X) - это расстояние от точки А до плоскости проекций  $\Pi_3$ , ордината (Y) - расстояние от точки А до плоскости проекций  $\Pi_2$  и аппликата (Z) - расстояние от точки А до плоскости проекций  $\Pi_1$ .

На рис. 1.21. построены проекции точки  $A$ , положение которой в пространстве было определено её координатами. Как видно из приведённого изображения каждая проекция точки определяется двумя координатами: фронтальная – абсциссой  $X$  и аппликатором  $Z$ , горизонтальная – абсциссой  $X$  и ординатой  $Y$ , профильная – ординатой  $Y$  и аппликатором  $Z$ . Следовательно, по координатам точки может быть построен и её комплексный чертёж. Справедливо и обратное – по комплексному чертежу можно определить координаты заданной точки.

Если все три координаты точки не равны нулю, например  $A(X, Y, Z)$  – точка располагается в пространстве; если одна из координат равна нулю, например  $A(X, Y, 0)$  – точка располагается на плоскости проекций и одна её проекция совпадает с самой точкой; если две координаты точки равны нулю, например  $A(X, 0, 0)$  – то точка располагается на оси координат (на оси проекций) и две её проекции совпадают с самой точкой. Если все координаты точки равны нулю, например  $A(0, 0, 0)$  – то точка располагается в начале координат, в точке  $O$ .

Значения координат точки находящейся в I четверти (см. рис. 1.15., 1.16.):  $X$  – «+»,  $Y$  – «+»,  $Z$  – «+»; во II четверти:  $X$  – «+»,  $Y$  – «-»,  $Z$  – «+»; в III четверти:  $X$  – «+»,  $Y$  – «-»,  $Z$  – «-»; в IV четверти:  $X$  – «-»,  $Y$  – «+»,  $Z$  – «-».

## 1.6. Безосные комплексные чертежи



В практической деятельности часто отпадает необходимость в вычерчивании плоскостей проекций, а также и осей координат, тогда комплексный чертёж точки будет выглядеть следующим образом (Рис. 1.22.). Данный чертёж называется безосным.

Безосное проецирование применяется при составлении технических чертежей. Благодаря этому расстояния между проекциями (видами) на технических чертежах выбираются произвольными в зависимости от наличия свободного места или с учётом других соображений. При необходимости ось проекций на безосном комплексном чертеже может, проведена практически в любом месте, но обязательно с соблюдением условия перпендикулярности её к соответствующим линиям проекционной связи.

Рисунок 1.22.

## 1.7. Комплексный чертёж прямой

### 1.7.1. Задание и положение прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана:

- координатами двух точек;
- точкой и направлением;
- взаимным пересечением двух плоскостей.

При ортогональном проецировании проекция прямой в общем случае прямая. Поэтому для определения проекции прямой достаточно знать проекции двух её точек.

Прямая в пространстве может занимать 13 положений:

1). Прямая, непараллельная и неперпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения.

2). Прямая, параллельная только одной какой-либо плоскости проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  или  $\Pi_3$ , соответственно называется прямой горизонтального, фронтального или профильного уровня.

3). Прямая, перпендикулярная к одной из плоскостей проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  или  $\Pi_3$ , соответственно называется фронтально, горизонтально или профильно-проецирующей прямой.

4). Прямая может лежать на одной из плоскостей проекций.

5). Прямая может лежать на оси координат.

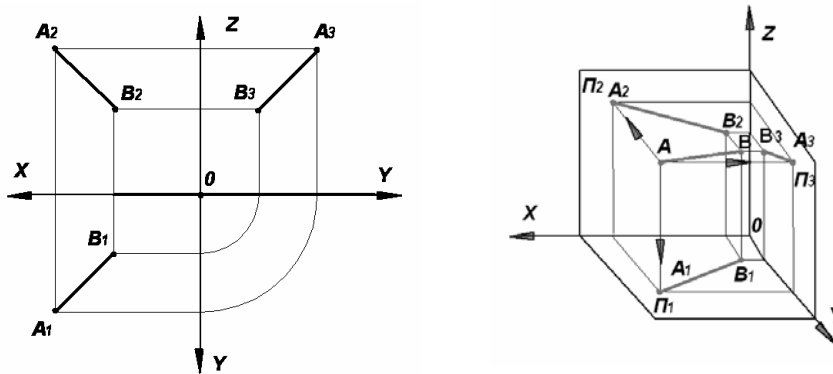


Рисунок 1.23.

Наибольший интерес представляют прямые общего положения. На рис. 1.23 показана модель и комплексный чертёж прямой  $AB$  общего положения в системе  $\Pi_1 / \Pi_2 / \Pi_3$ . Характерным признаком прямой общего положения на комплексном чертеже является то, что все ее проекции по отношению к осям проекций расположены под углом, не равным  $90^\circ$  или  $180^\circ$ . У отрезка прямой общего положения:  $[A_1B_1] < [AB]$ ;  $[A_2B_2] < [AB]$ ;  $[A_3B_3] < [AB]$ ; т. е. каждая его проекция меньше натуральной величины самого отрезка.

### 1.7.2. Следы прямой

Точки пересечения (встречи) прямой  $\ell$  с плоскостями проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  или  $\Pi_3$  называются соответственно горизонтальным, фронтальным или профильным следом прямой.

На рис. 1.24 точка  $F$  - фронтальный след прямой  $AB$ ; точка  $G$  - горизонтальный след прямой  $AB$ . Фронтальная проекция фронтального следа  $F_2$  и горизонтальная проекция горизонтального следа  $G_1$  всегда совпадают с самими следами в какой бы четверти пространства не находилась прямая.

Пользуясь нижеприведенным правилом, построим проекции и следы прямой на комплексном чертеже (Рис. 1.25).

Для построения горизонтального следа прямой  $AB$  продолжаем фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью  $OX$ , в точке пересечения восстанавливаем перпендикуляр и ведём его до пересечения с продолжением горизонтальной проекции прямой  $A_1B_1$ . Точка пересечения укажет положение горизонтального следа прямой  $G$ . Восстанавливаем перпендикуляр и ведём его до пересечения с продолжением фронтальной проекцией прямой  $A_2B_2$ . Точка пересечения укажет положение фронтального следа прямой  $F$ .

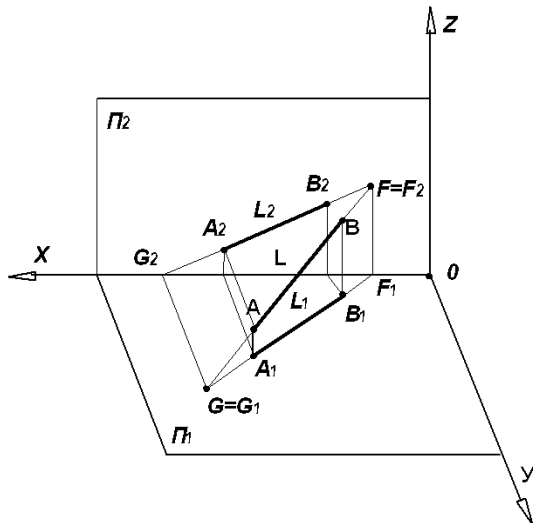


Рисунок 1. 24.

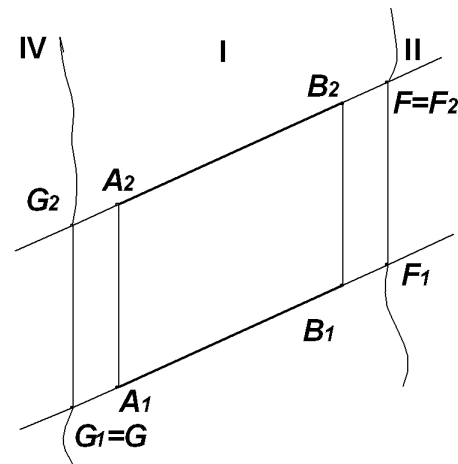


Рисунок 1.25.

Следы прямой указывают границы перехода прямой из одной четверти в другую. В нашем случае прямая АВ проходит через IV-ю, I-ю и II-ю четверти.

Следует иметь в виду, что прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций, следа на этой плоскости иметь не может, т. к. она с ней не пересекается.

### 1.7.3. Частные случаи расположения прямой

На рис. 1.26 показана модель и комплексный чертеж прямой АВ горизонтального уровня. Ее горизонтальная проекция  $A_1B_1$ , занимает положение, соответствующее положению самой прямой в пространстве, а фронтальная  $A_2B_2$  и профильная  $A_3B_3$  проекции параллельны соответственно осям ОХ и ОУ, так как  $Z_B - Z_A = 0$ . Отрезок [АВ] прямой горизонтального уровня и углы  $\beta$  и  $\gamma$  наклона ее к плоскостям  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  проецируются на плоскость  $\Pi_1$  без искажения, т.е. в натуральную величину.

На рис. 1.27 показана модель и комплексный чертеж прямой АВ фронтального уровня. Ее фронтальная проекция  $A_2B_2$  занимает положение, соответствующее положению самой прямой в пространстве, а горизонтальная  $A_1B_1$  и профильная  $A_3B_3$  проекции параллельны соответственно осям ОХ и ОZ, так как  $Y_B - Y_A = 0$ . Отрезок [АВ] прямой фронтального уровня и углы  $\alpha$  и  $\gamma$  наклона ее к плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  проецируются на плоскость  $\Pi_2$  без искажения, т.е. в натуральную величину.

На рис. 1.31. показана модель и комплексный чертеж прямой АВ профильного уровня. Ее профильная проекция занимает положение, соответствующее положению самой прямой в пространстве, а горизонтальная  $A_1B_1$  и фронтальная  $A_2B_2$  проекции перпендикулярны оси ОХ, так как  $X_B - X_A = 0$ . Отрезок [АВ] прямой профильного уровня и углы  $\alpha$  и  $\beta$  наклона ее к плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  проецируются на плоскость  $\Pi_3$  без искажения, т.е. в натуральную величину.

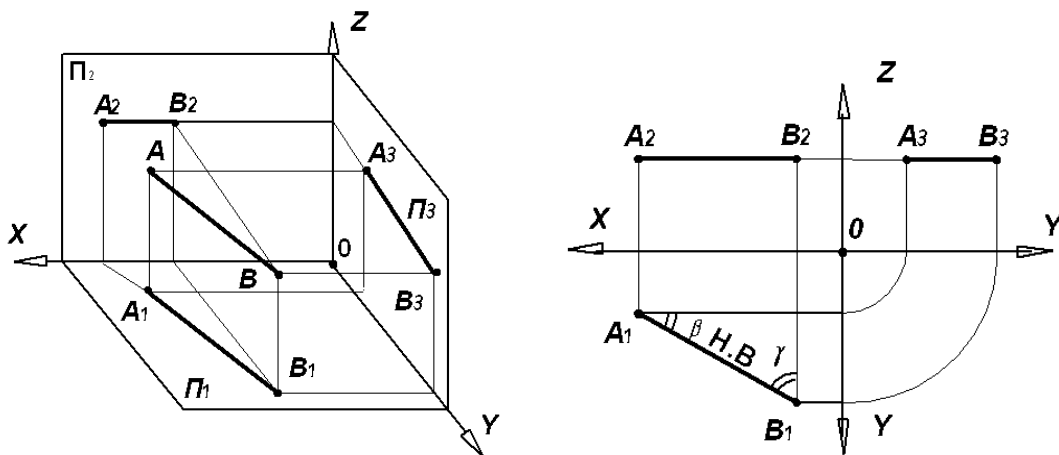


Рисунок 1.26.

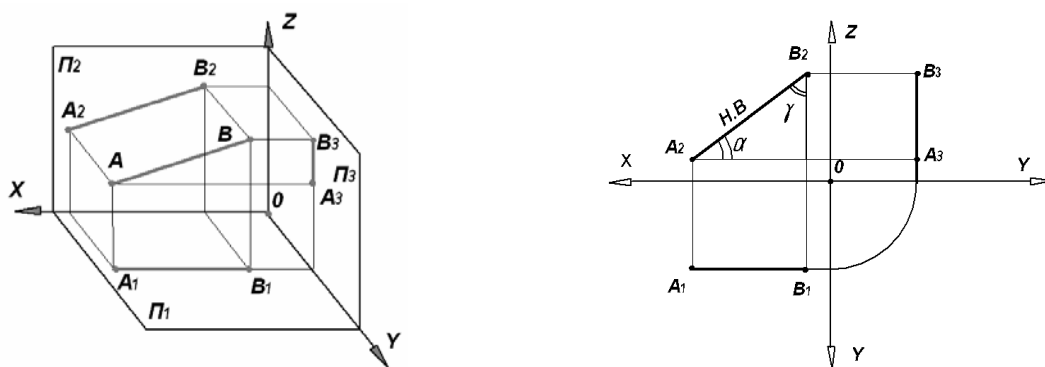


Рисунок 1.27.

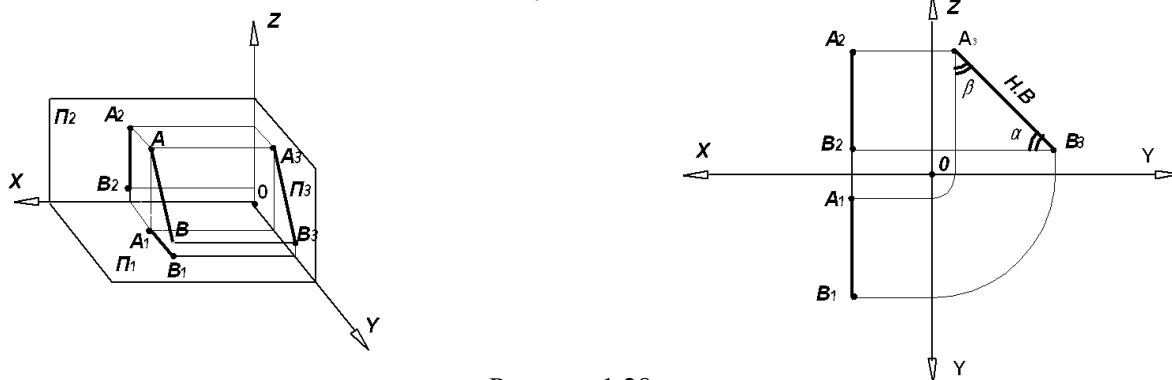


Рисунок 1.28.

Из рисунков 1.26, 1.27, 1.28 видно, что характерным признаком прямой уровня является то, что одна из проекций прямой проходит под углом, не равным  $90^0$  и  $180^0$  к одной из осей проекций, а две другие параллельны или перпендикулярны соответствующим осям.

На рис. 1.29 показана модель и комплексный чертеж горизонтально проецирующей прямой AB. Горизонтальная проекция этой прямой вырождается в точку, а фронталь-

ная  $A_2B_2$  и профильная  $A_3B_3$  проекции перпендикулярны,

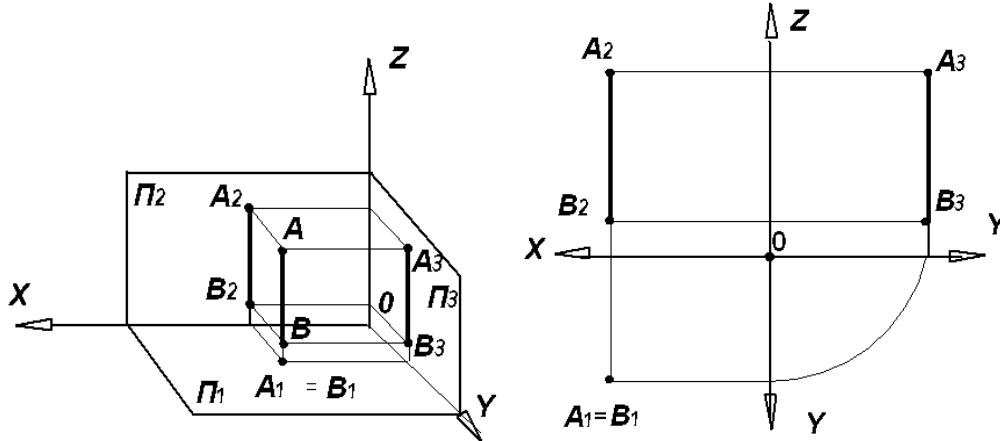


Рисунок 1.29.

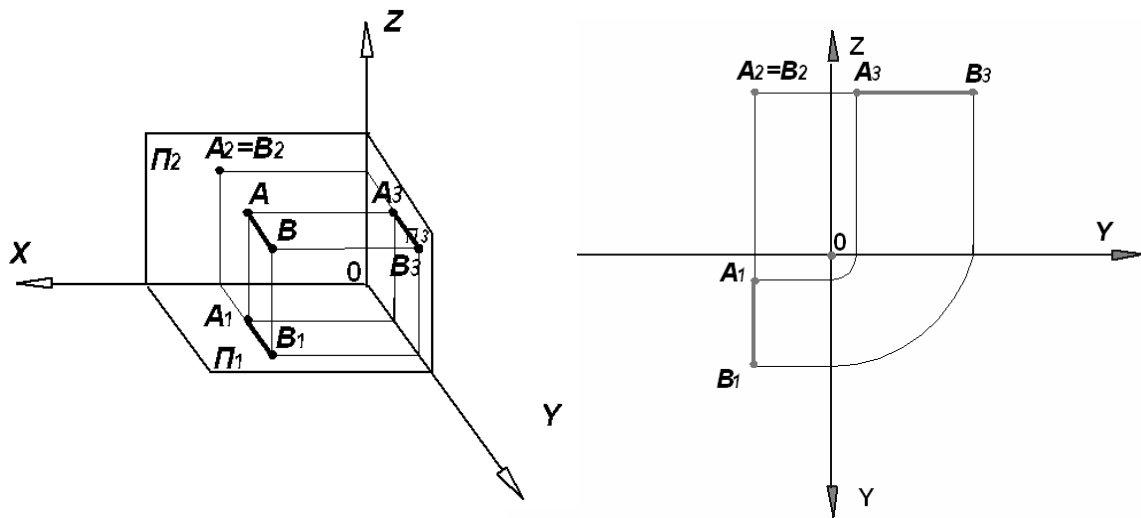


Рисунок 1.30.

соответственно осям  $OX$  и  $OY$ . Горизонтально проецирующая прямая параллельна одновременно плоскостям проекций  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ , следовательно, на эти плоскости она спроецируется в натуральную величину, т.е.  $|A_2B_2| = |A_3B_3| = |AB|$

На рис. 1.30 показана модель и комплексный чертеж фронтально проецирующей прямой  $AB$ . Фронтальная проекция этой прямой вырождается в точку, а горизонтальная  $A_1B_1$  и профильная  $A_3B_3$  проекции перпендикулярны соответственно осям  $OX$  и  $OZ$ . Фронтально проецирующая прямая параллельна одновременно плоскостям проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$ , следовательно, на эти плоскости она спроецируется в натуральную величину, т.е.  $|A_1B_1| = |A_3B_3| = |AB|$

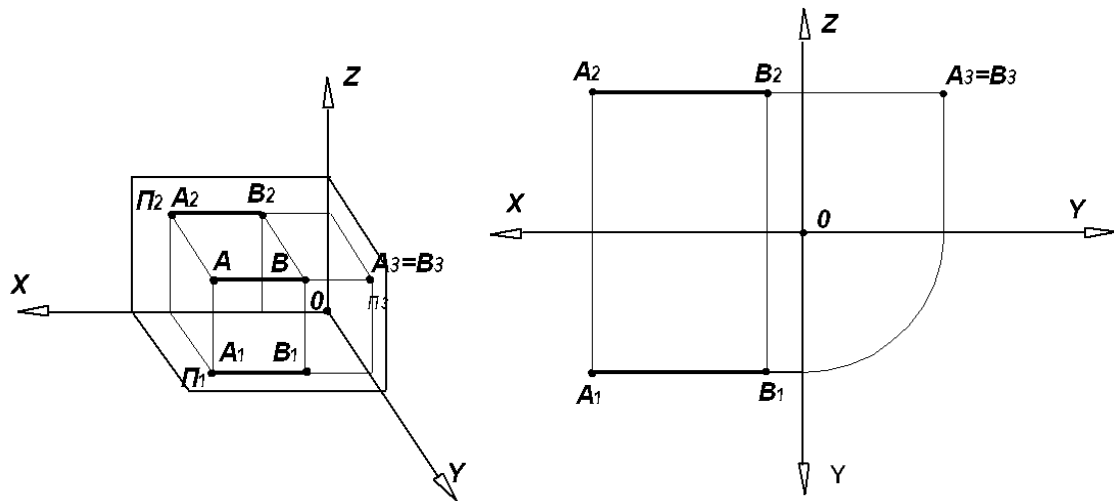


Рисунок 1.31.

На рис. 1.31 показана модель и комплексный чертеж профильно проецирующей прямой  $AB$ . Профильная проекция этой прямой вырождается в точку, а горизонтальная  $A_1B_1$  и фронтальная  $A_2B_2$  проекции перпендикулярны соответственно осям  $OY$  и  $OZ$ . Профильно проецирующая прямая параллельна одновременно плоскостям проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , следовательно, на эти плоскости она спроецируется в натуральную величину, т.е.  $|A_1B_1| = |A_2B_2| = |AB|$ . Из рис. 1.29, 1.30, 1.31 видно, что характерным признаком проецирующей прямой является то, что одна из проекций прямой вырождается в точку, а две другие перпендикулярны соответствующим осям.

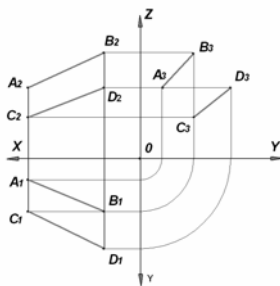


Рисунок 1.32.

### 1.8. Взаимное положение двух прямых в пространстве.

Две прямые в пространстве могут быть параллельны, пересекаться или скрещиваться. У параллельных прямых одноимённые проекции на все три плоскости проекций попарно параллельны (Рис. 1.32), это вытекает из свойств параллельного проецирования. Справедливо и обратное, т. е. если одноимённые проекции двух прямых на три плоскости проекций попарно параллельны, то эти прямые параллельны между собой.

На комплексном чертеже (Рис. 1.35.)  $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ ;  $A_2B_2 \parallel C_2D_2$ ;  $A_3B_3 \parallel C_3D_3$  - значит, прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны между собой. Для того чтобы сделать вывод о взаимной параллельности двух прямых общего положения, достаточно параллельности их одноимённых проекций на две плоскости проекций. Но для прямой профильного уровня этого условия недостаточно. О взаимной параллельности двух профильных прямых можно судить, лишь построив их профильные проекции (Рис. 1.33).

Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются, если имеют одну общую точку.

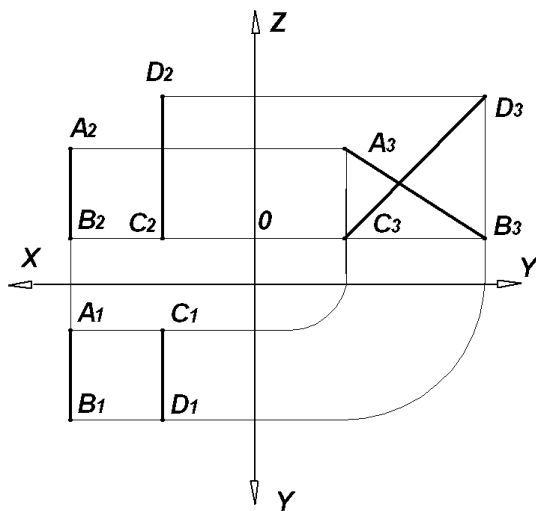


Рисунок 1.33.

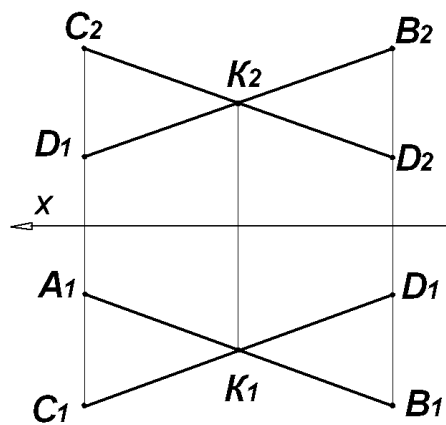


Рисунок 1.34.

На комплексном чертеже у пересекающихся прямых проекции их общей точки (точки пересечения) всегда находятся на одной линии проекционной связи (Рис. 1.34).

Прямые непараллельные и непересекающиеся называются скрещивающимися. На комплексном чертеже у скрещивающихся прямых точки пересечения их одноимённых проекций не лежат на одной линии проекционной связи (Рис. 1.35.). Точка пересечения одноимённых проекций скрещивающихся прямых представляет собой проекции двух точек, из которых одна принадлежит первой, а другая – второй из этих скрещивающихся прямых.

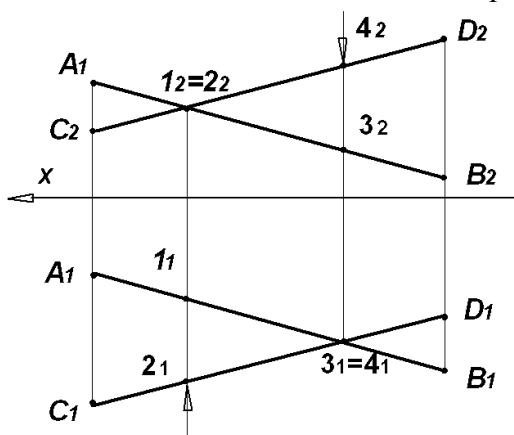


Рисунок 1.35.

### 1.9. Метод конкурирующих точек

Для определения видимости геометрических элементов (какая из двух скрещивающихся прямых располагается над другой или перед другой) на комплексном чертеже

используется метод конкурирующих точек.

Согласно этому методу (методу определения расстояний от конкурирующих точек до соответствующей плоскости проекций и их сравнения), нужно от точки пересечения проекций прямых по линии проекционной связи переместиться в область противоположных проекций, пройти их, развернуться на  $180^\circ$  и посмотреть по стрелке, какая точка расположена ближе к наблюдателю, следовательно, эта точка и будет видима в рассматриваемом пересечении. На рис.1.35 точка 2, принадлежащая прямой CD, и точка 1, принадлежащая прямой AB, расположены на одном перпендикуляре к плоскости  $\Pi_2$ . Фронтальные проекции точек 1 и 2 слились в одну точку, которая является точкой пе-

ресечения фронтальных проекций  $A_2B_2$  и  $C_2D_2$  прямых. Точка 2 более удалена от плоскости  $\Pi_2$ , чем точка 1, следовательно, при проецировании на плоскость  $\Pi_2$  она закроет собой точку 1, т.е. будет видима. Аналогично - точка 4, принадлежащая прямой  $CD$ , и точка 3, принадлежащая прямой  $AB$ , расположены на одном перпендикуляре к плоскости  $\Pi_1$ . Горизонтальные проекции точек 3 и 4 слились в одну точку, которая является точкой пересечения горизонтальных проекций  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  прямых. Точка 4 более удалена от плоскости  $\Pi_1$ , чем точка 3, следовательно, при проецировании на плоскость  $\Pi_1$  она закроет собой точку 3, т.е. будет видима.

### 1.10. Проекция плоских углов

Плоский угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если его стороны параллельны этой плоскости проекций. Но если проецируемый угол прямой (Рис. 1.36), то, для того чтобы он спроецировался на плоскость проекций в

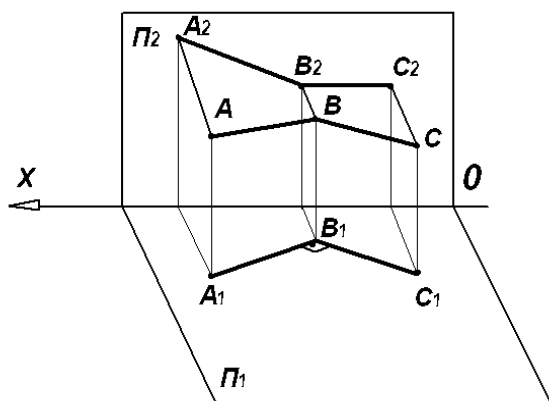


Рисунок 1.36.

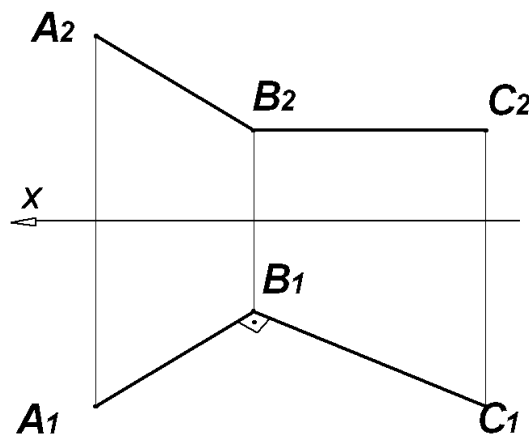


Рисунок 1.37.

натуральную величину, достаточно параллельности одной его стороны этой плоскости проекций.

Изображённый на рис. 1.37  $\angle ABC$  - прямой, т. к. одна его сторона ( $BC$ ) параллельна плоскости проекций  $\Pi_1$ , на которую он спроецировался в виде прямого угла ( $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ ), т. е. в натуральную величину.

### Вопросы для самоконтроля

- 1) Центральное и параллельное проецирование.
- 2) Ортогональное проецирование и его свойства.
- 3) Прямые линии частного положения.
- 4) Чертежные признаки линий частного положения.
- 5) Взаимное положение прямых в пространстве: параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся прямые.
- 6) Определение видимости геометрических элементов на чертеже. Привести пример.
- 7) Свойства проекций плоских углов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная*

1. **Фазлулин, Э.М., Халдинов, В.А.** Инженерная графика / Э.М. Фазлулин, В.А. Халдинов. - М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 400 с.
2. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика. Часть I. Лабораторный практикум: уч. пособ. /А.Г. Герасимов. - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ» - Саратов: ИЦ «Наука», 2012. - 218 с.
3. **Чекмарев, А.А.** Инженерная графика / А.А. Чекмарев. - М. : Высшая школа, 2008. – 365 с.
4. **Герасимов, А.Г., Змеев, А.Я.** Курс начертательной геометрии. Учебное пособие с грифом УМО / А.Г. Герасимов, А.Я. Змеев. - Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2006. -188 с.

### *Дополнительная*

1. Стандарты ЕСКД.
2. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Болынова, В.В.** Начертательная геометрия / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Болынова. - Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – 173 с.
3. **Герасимов, А.Г.** Методические указания и задания к выполнению модульной графической работы «Комплексное решение метрических и позиционных задач» / А.Г. Герасимов. - Саратов, ЦНТИ, 2006, – 24 с.
4. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины / А.Г. Герасимов, - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова», 2004. - 20 с.

## Лекция 2

### ЗАДАНИЕ ПЛОСКОСТИ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ МОНЖА. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

#### 2.1. Комплексный чертеж плоскости

##### 2.1.1. Задание плоскости в пространстве и на комплексном чертеже

В пространстве и на комплексном чертеже (Рис. 2.1.) плоскость можно задать: тремя точками, не лежащими на одной прямой; прямой и не принадлежащей ей точкой; двумя пересекающимися прямыми; двумя параллельными прямыми; любой плоской фигурой; следами.

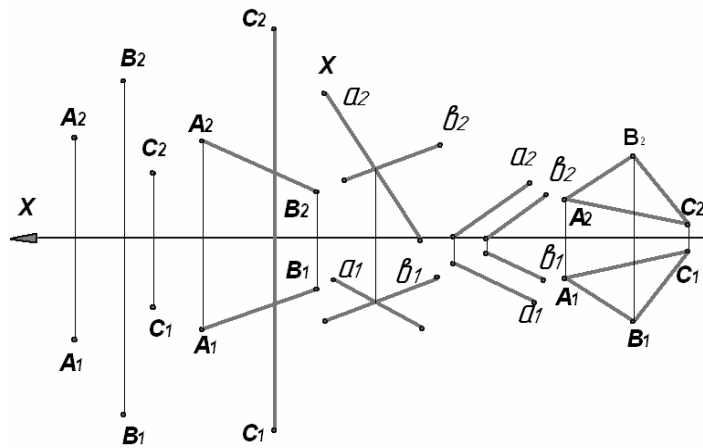


Рисунок 2.1.

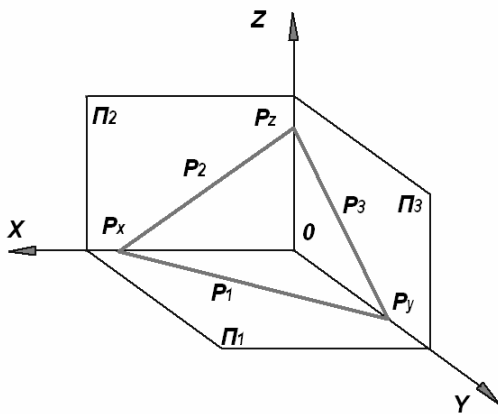


Рисунок 2.2.

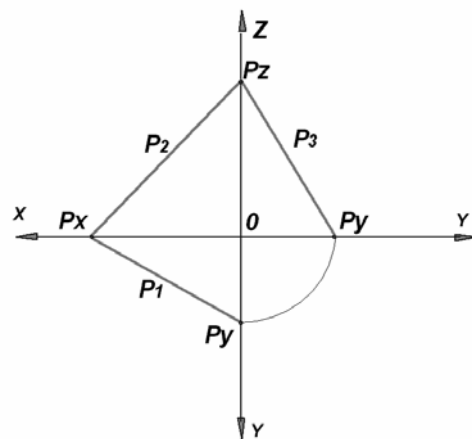


Рисунок 2.3

Следом плоскости называется линия ее пересечения с плоскостями проекций. На модели (Рис. 2.2) плоскость  $P$  пересекает плоскости проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  по прямым линиям  $P_1$ ;  $P_2$ ;  $P_3$ . Соответственно эти прямые линии называются следами плоскости  $P$ :  $P_1$  – горизонтальный след,  $P_2$  – фронтальный след,  $P_3$  – профильный след.

Точки пересечения следов на осях проекций  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  называются точками схода следов, соответственно  $P_x$ ,  $P_y$  и  $P_z$ . На рис. 2.3 показан комплексный чертёж плоскости  $P$ , заданной следами в системе  $\Pi_1 / \Pi_2 / \Pi_3$ .

### 2.1.2. Плоскость общего положения

Плоскость может занимать различные положения относительно плоскостей проекций. Плоскость, непараллельная и неперпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется плоскостью общего положения. Плоскость на чертеже задают проекциями таких -принадлежащих ей геометрических фигур, которые однозначно определяют ее положение в пространстве и позволяют построить любую ее точку.

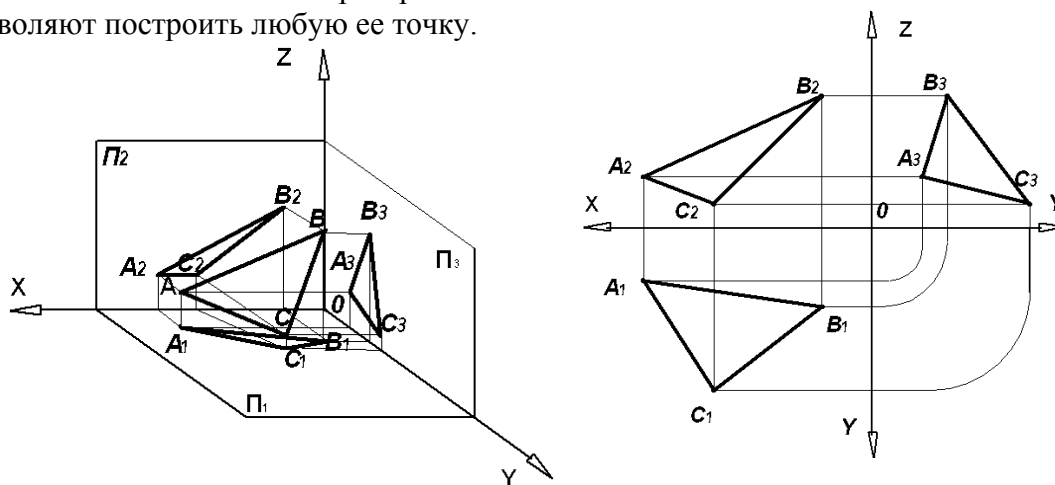


Рисунок 2.4.

На рис. 2.4 приведены модель и комплексный чертёж плоскости общего положения, заданной треугольником –  $P(\Delta ABC)$ .

### 2.1.3. Принадлежность прямой и точки плоскости

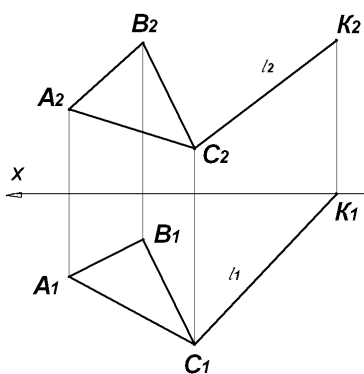


Рисунок 2.5.

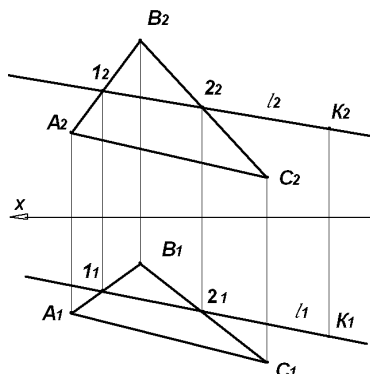


Рисунок 2.6.

Прямая принадлежит плоскости: а) если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости (на рис. 2.5. прямая  $l$  принадлежит плоскости  $P(\Delta ABC)$ , т.к. имеет с ней две общие точки - 1 и 2);

б) если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в данной плоскости (на рис. 2.6. прямая  $l$  принадлежит плос-

кости  $P(\triangle ABC)$ , т.к. имеет с ней общую точку  $C$  и параллельна стороне треугольника  $AB$ ).

Если плоскость задана следами, то прямая принадлежит плоскости:

а) если следы прямой находятся на одноимённых следах плоскости (Рис. 2.7);

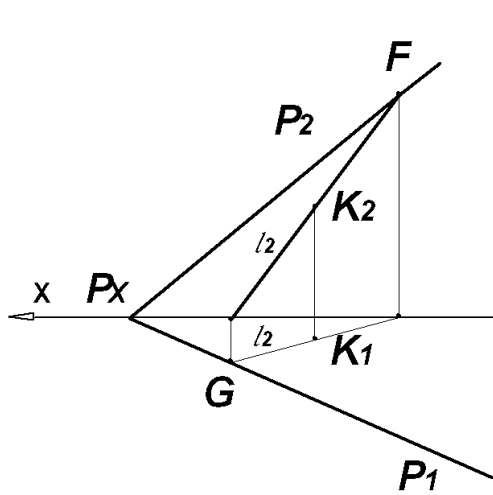


Рисунок 2.7.

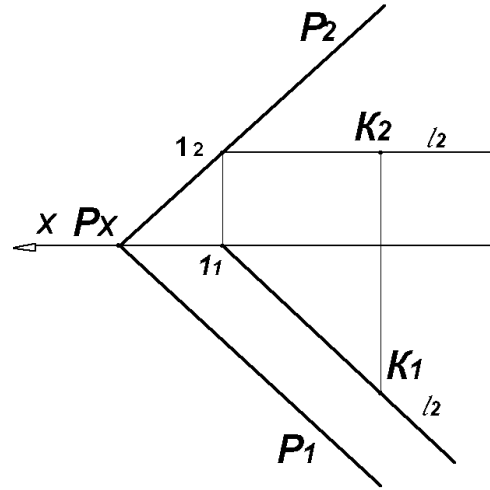


Рисунок 2.8.

б) если она параллельна одному из следов плоскости и имеет с другим общую точку (Рис. 2.8).

Точка принадлежит плоскости, если построить вначале в этой плоскости прямую, а затем на ней взять точку (например точка  $K$  на рис. 2.5, 2.6, 2.7, 2.8).

### 2.1.4 Главные линии плоскости

Прямые, принадлежащие плоскости и в то же время параллельные горизонтальной, фронтальной или профильной плоскости проекций, называются главными линиями плоскости (Рис. 2.9).

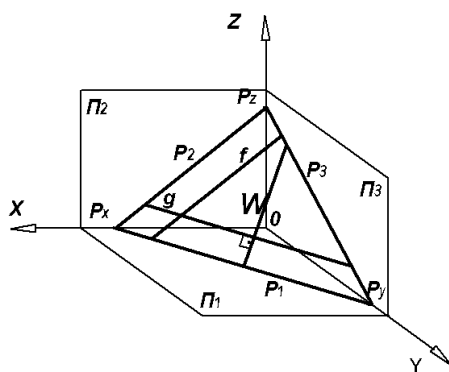


Рисунок 2.9.

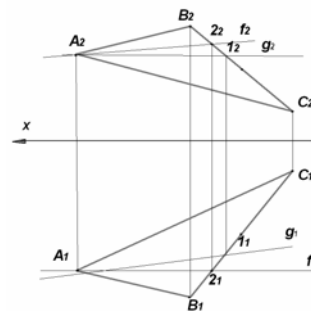


Рисунок 2.10

Построение горизонтали  $g$  (Рис. 2.10.), принадлежащей плоскости  $P(\triangle ABC)$ , начинают с проведения ее фронтальной проекции  $g_2$  параллельно оси  $OX$ , а горизонтальную проекцию  $g_1$  проводят по построению из условия принадлежности данной плоскости.

Построение фронтали  $f$ , принадлежащей плоскости, начинают с проведения ее горизонтальной проекции  $f_1$  параллельно оси  $OX$ , а фронтальную проекцию  $f_2$  получают построением, исходя также из условия принадлежности.

Аналогично строятся проекции главных линий плоскости, если плоскость задана следами (Рис. 2.11.).

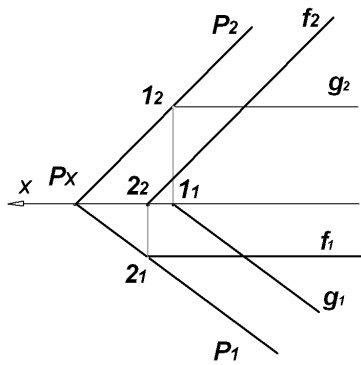


Рисунок 2.11.

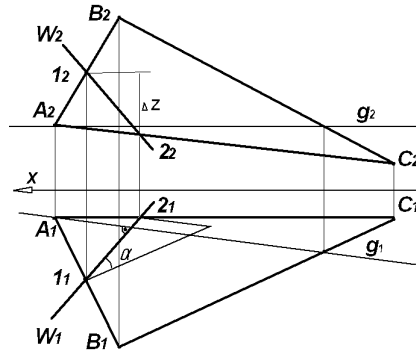


Рисунок 2.12.

Прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные горизонталям, фронталям или профильным прямым этой плоскости, называются линиями наибольшего наклона или ската.

Например, прямая  $w$  является линией наибольшего наклона данной плоскости  $P$  к горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  (Рис.2.9.). На рис. 2.10 представлен комплексный чертеж с линией наибольшего наклона  $w$  в плоскости  $P(\Delta ABC)$  к плоскости  $\Pi_1$ .

Построение линии наибольшего ската  $w$  начинают с проведения ее горизонтальной проекции  $w_1$  перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали  $g_1$ , основываясь на свойстве проецирования прямого угла без искажения. Фронтальную проекцию  $w_2$  получают построением, исходя из условия принадлежности прямой  $w$  плоскости  $P(\Delta ABC)$ .

Величину угла  $\alpha$  наклона линии наибольшего ската  $w$ , а, следовательно, и самой плоскости к горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  можно определить способом прямоугольного треугольника.

### 2.1.5. Плоскости частного положения

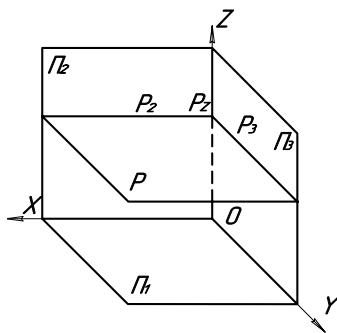


Рисунок 2.13.

Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  или  $\Pi_3$ , соответственно называется плоскостью горизонтального, фронтального или профильного уровня.

На рис. 2.13 показана модель плоскостей проекций и положение плоскости  $P$  горизонтального уровня. На рис. 2.14, 2.15 представлены комплексные чертежи этой плоскости, если плоскость  $P$  задана следами –  $P(P_1, P_2, P_3)$  или треугольником –  $P(\Delta ABC)$ .

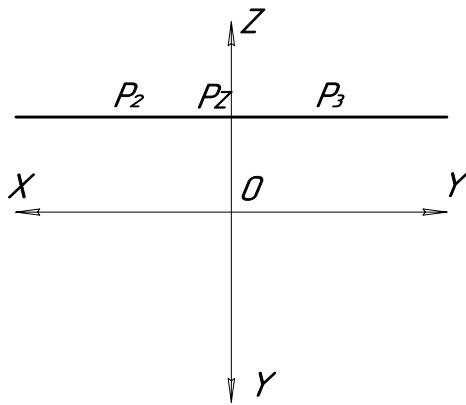


Рисунок 2.14.

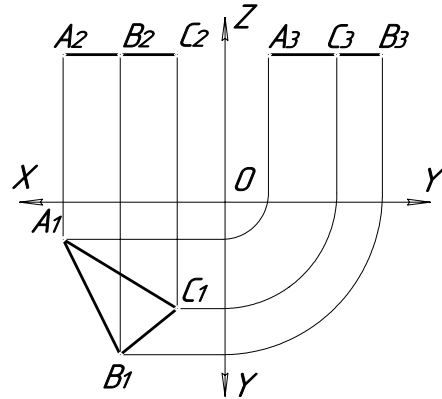


Рисунок 2.15

На рис. 2.16. показана модель плоскостей проекций и положение плоскости  $P$  фронтального уровня. На рис. 2.17, 2.18 представлены комплексные чертежи этой плоскости, если плоскость  $P$  задана следами –  $P(P_1, P_2, P_3)$  или двумя параллельными прямыми –  $P(a // b)$ .

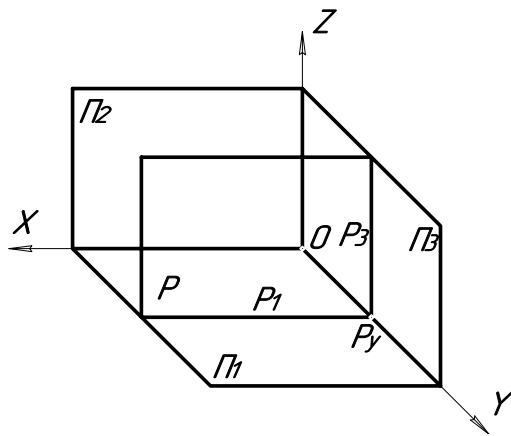


Рисунок 2.16.

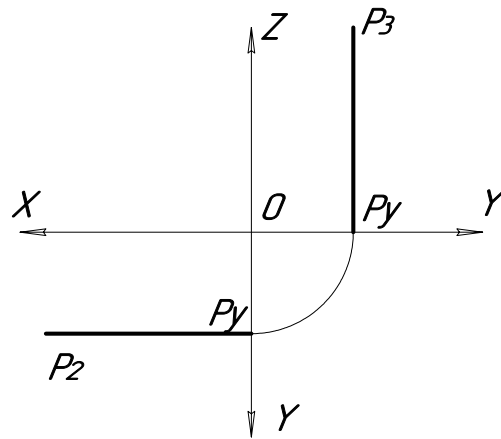


Рисунок 2.17.

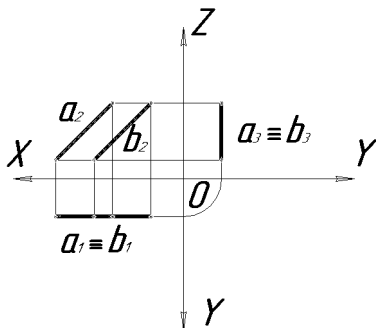


Рисунок 2.18.

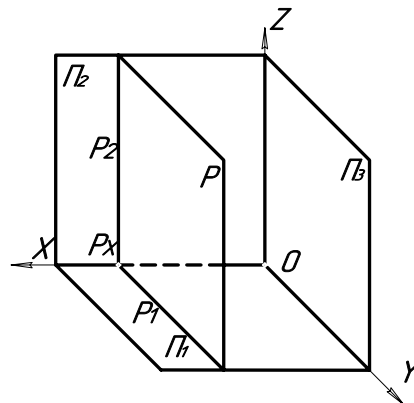


Рисунок 2.19.

На рис. 2.19 показана модель плоскостей проекций и положение плоскости  $P$  профильного уровня. На рис. 2.20, 2.21 представлены комплексные чертежи этой плоскости, если плоскость  $P$  задана следами –  $P(P_1, P_2, P_3)$  или двумя пересекающимися прямыми –  $P(a \cap b)$ .

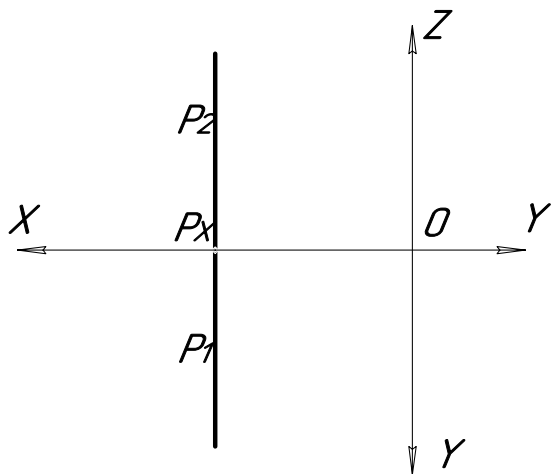


Рисунок 2.20

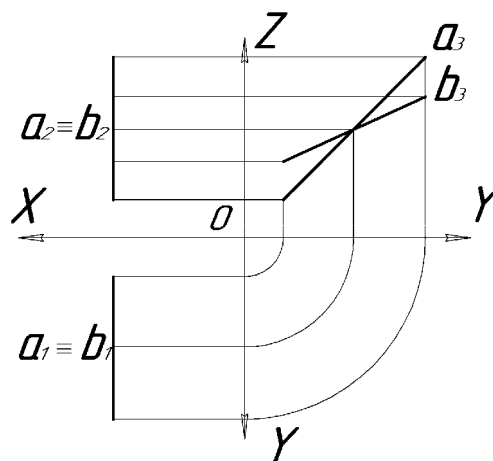


Рисунок 2.21

Любой геометрический образ, принадлежащий плоскости уровня  $P$  проецируется на параллельную ей плоскость проекций в натуральную величину, например:  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$  (Рис. 2.15), прямые  $a = a_2$ ,  $b = b_2$  (Рис. 2.18),  $a = a_3$ ,  $b = b_3$  (Рис. 2.21), а на другие плоскости проекций на прямые, совпадающие с положением следов плоскости и параллельные или перпендикулярные соответствующим осям. Поэтому такие следы плоскости называют собирательными. Например: следы  $P_2, P_3$  – собирательные (Рис. 2.14),  $A_2B_2C_2 // OX$ ,  $A_3B_3C_3 // OY$  (Рис. 2.15).

Плоскость, перпендикулярная только одной из плоскостей проекций  $\Pi_1, \Pi_2$  или  $\Pi_3$ , а к остальным плоскостям проекций не параллельна и не перпендикулярна, соответственно называется горизонтально, фронтально или профильно проецирующей.

На рис. 2.20 показана модель плоскостей проекций и положение горизонтально проецирующей плоскости  $P$ . На рис. 2.21, 2.22 представлены комплексные чертежи этой плоскости, если плоскость  $P$  задана следами –  $P(P_1, P_2, P_3)$  или треугольником –  $P(\Delta ABC)$ .

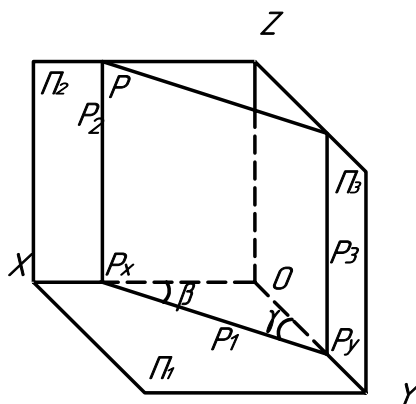


Рисунок 2.22

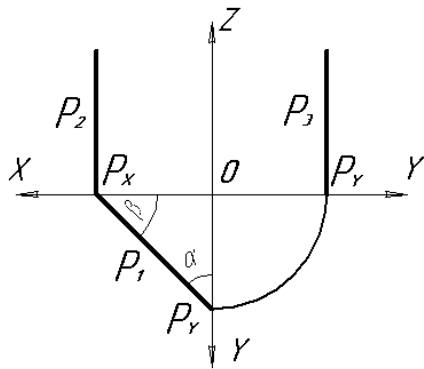


Рисунок 2.23.

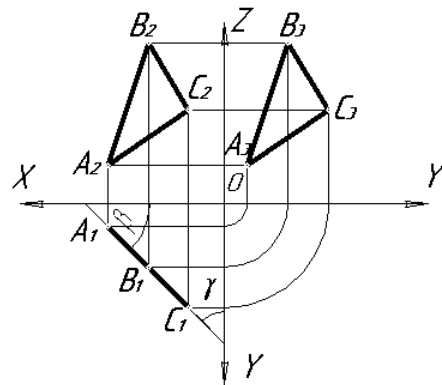


Рисунок 2.24.

На рис. 2.25 показана модель плоскостей проекций и положение фронтально проецирующей плоскости  $P$ .

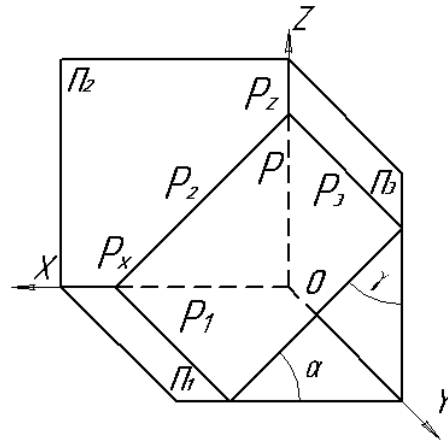


Рис. 2.25

На рис. 2.26, 2.27 представлены комплексные чертежи этой плоскости, если плоскость  $P$  задана следами –  $P(P_1, P_2, P_3)$  или двумя параллельными прямыми –  $P(a // b)$ .

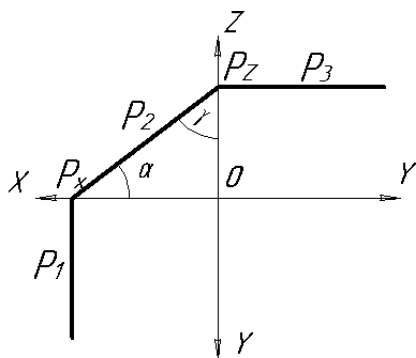


Рисунок 2.26.

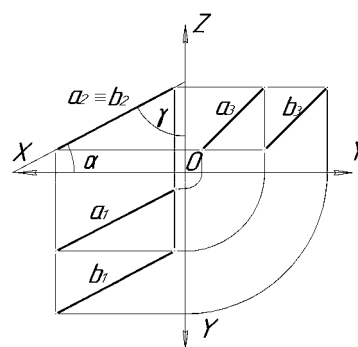


Рисунок 2.27.

На рис. 2.28 показана модель плоскостей проекций и положение профильно проецирующей плоскости  $P$ .

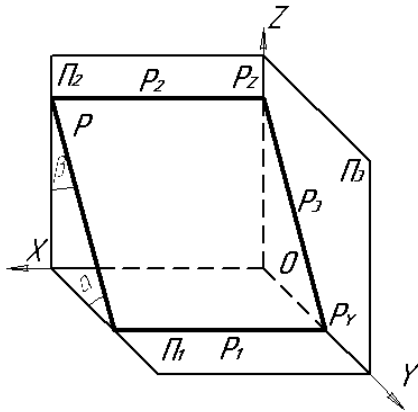


Рисунок 2.28

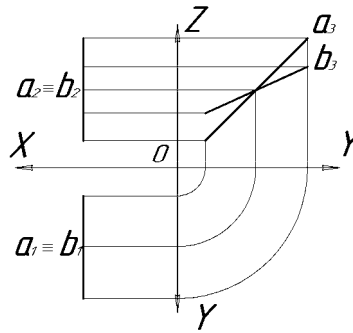
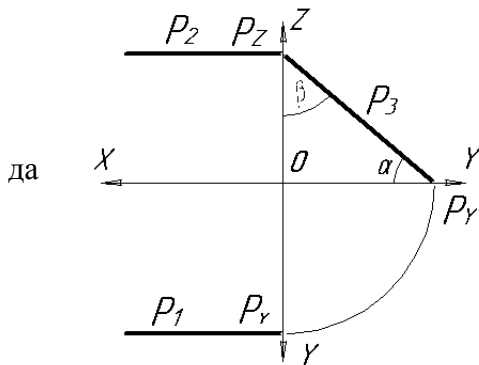


Рисунок 2.29.

На рис. 2.29, 2.30 представлены комплексные чертежи этой плоскости, если плоскость  $P$  задана следами –  $P(P_1, P_2, P_3)$  или двумя пересекающимися прямыми –  $P(a \cap b)$ .



да

Рисунок 2.30.

Любой геометрический образ, принадлежащий проецирующей плоскости  $P$  проецируется на перпендикулярную ей плоскость проекций в прямую, совпадающую с положением собирательного следа плоскости, например: след  $P_1$  и  $\Delta A_1B_1C_1$  (Рис. 2.23, 2.24), след  $P_2$  и прямые  $a_2, b_2$  (рис. 66, 67), след  $P_3$  и прямые  $a_3, b_3$  (Рис. 2.29, 2.30).

Показанные на рис. 2.23, 2.24, 2.26, 2.27, 2.28, 2.30 углы  $\alpha, \beta, \gamma$  являются углами наклона плоскости  $P$  соответственно к горизонтальной, фронтальной или профильной плоскостям проекций.

## 2.2. Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей

### 2.2.1. Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей плоскости.

Пусть требуется через точку  $D$  провести прямую  $\ell$ , параллельную плоскости  $P(\Delta ABC)$ . Для этого достаточно провести через точку  $D$  прямую  $\ell$ , параллельную какой-либо прямой, принадлежащей плоскости

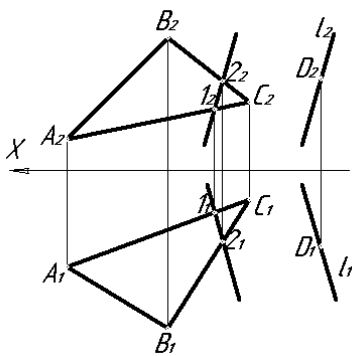


Рисунок 2.31

кости треугольника  $ABC$ , например  $1-2$  (Рис. 2.31). На комплексном чертеже горизонтальные и фронтальные проекции прямой  $1-2$  и  $\ell$  будут попарно параллельны ( $1_12_1 // \ell_1, 1_22_2 // \ell_2$ ).

### 2.2.2 Параллельность двух плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Следовательно, чтобы построить плоскость  $Q$ , параллельную плоскости  $P(\triangle ABC)$ , достаточно провести через точку  $D$  две прямые –  $\ell$  и  $n$ , параллельно двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости  $P$ , например сторонам треугольника  $AB$  и  $BC$  (Рис. 2.32). Плоскость  $Q(\ell \cap n)$  параллельна плоскости  $P(\triangle ABC)$ , так как  $AB \parallel \ell$  ( $A_1B_1 \parallel \ell_1$ ,  $A_2B_2 \parallel \ell_2$ ) и  $BC \parallel n$  ( $B_1C_1 \parallel n_1$ ,  $B_2C_2 \parallel n_2$ ).

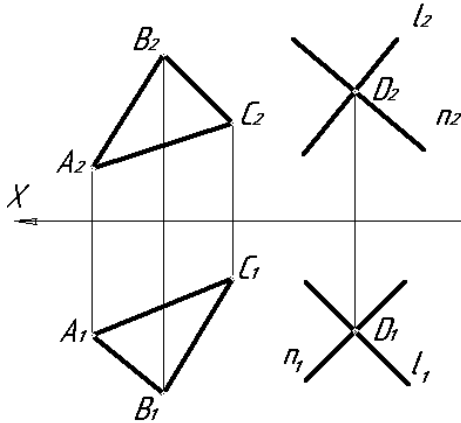


Рисунок 2.32.

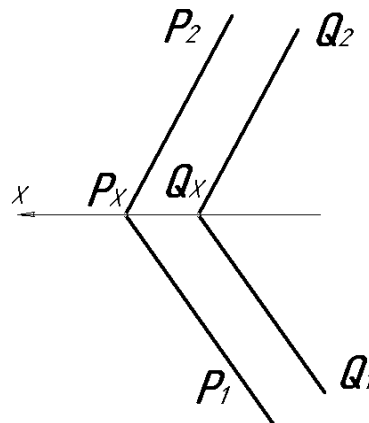


Рисунок 2.33.

Если плоскости  $P$  и  $Q$  заданы следами (Рис. 2.33), то об их взаимной параллельности в пространстве можно судить по параллельности их одноимённых следов –  $P_1 \parallel Q_1$ ,  $P_2 \parallel Q_2$ .

### 2.2.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая  $\ell$  перпендикулярна плоскости  $P$ , если она перпендикулярна любым двум прямым, лежащим в этой плоскости, например, горизонтали  $g$  и фронтали  $f$  (Рис. 2.34).

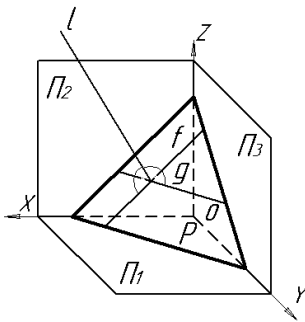


Рисунок 2.34.

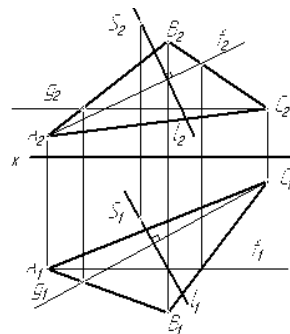


Рисунок 2.35.

Если прямая  $\ell$  перпендикулярна к плоскости  $P$ , то на комплексном чертеже горизонтальная проекция перпендикуляра  $\ell_1$  перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали  $g_1$  плоскости (Рис. 2.35), а фронтальная проекция перпендикуляра  $\ell_2$  будет перпендикулярна фронтальной проекции фронтали  $f_2$ .

Это положение вытекает из свойства ортогональных проекций о проецировании без искажения прямого угла, ведь угол между  $\ell$  и  $g$  прямой и одна его сторона ( $g$ ) параллельна плоскости  $\Pi_1$  и угол между  $\ell$  и  $f$  тоже прямой и одна его сторона ( $f$ ) параллельна плоскости  $\Pi_2$ .

Построение перпендикуляра  $\ell$  к плоскости  $P$  упрощается если последняя задана следами (не нужно строить в плоскости горизонталь  $g$  и фронталь  $f$ ), т.к. нулевая горизонталь и нулевая фронталь соответственно совпадают с горизонтальным  $P_1$  и фронтальным  $P_2$  следами плоскости -  $\ell_1 \perp P_1$ ,  $\ell_2 \perp P_2$  (Рис. 2.36).

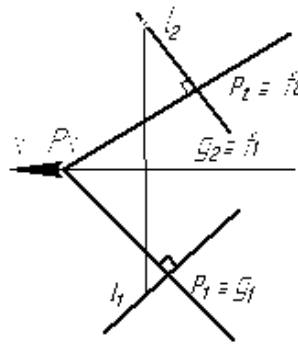


Рисунок 2.36.

#### 2.2.4. Перпендикулярность двух плоскостей

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости. На рис. 2.37 плоскость  $Q(\ell \cap m) \perp P(P_1, P_2)$ , т.к. плоскость  $Q$  проходит через прямую  $\ell$  перпендикулярную плоскости  $P$ .

У взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения их одноимённые следы никогда не перпендикулярны. Но если одна из заданных плоскостей (или обе) является плоскостью частного положения, то взаимная перпендикулярность на комплексном чертеже одной пары их следов свидетельствует о перпендикулярности плоскостей в пространстве (Рис. 2.38).

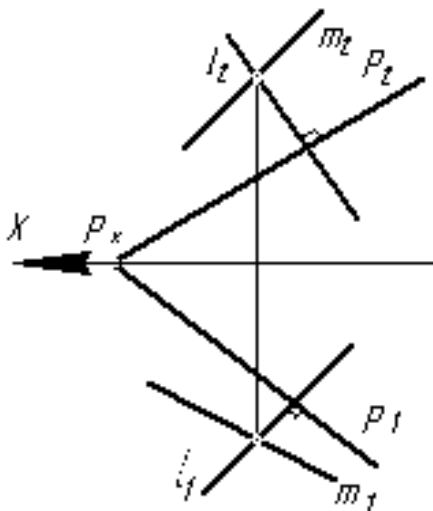


Рисунок 2.37.

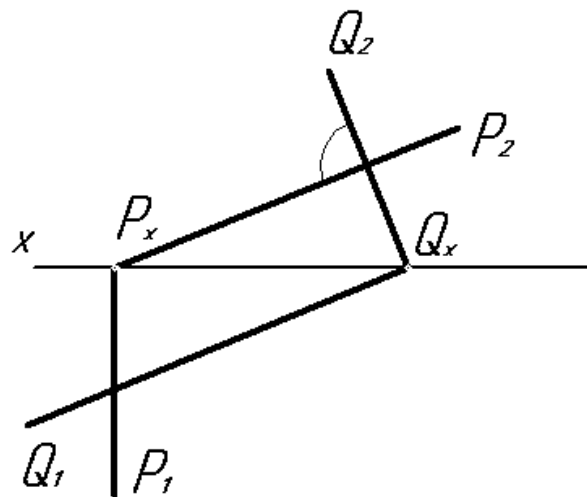


Рисунок 2.38.

### 2.2.5. Пересечение двух плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой линии, общей для обеих плоскостей. Положение прямой линии определяется положением двух принадлежащих ей точек. Следовательно, для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно определить две точки, общие для обеих заданных плоскостей.

Если плоскости  $P$  и  $Q$  заданы следами (Рис.2.39), то проще отметить точки  $M$  и  $N$ , являющиеся точками пересечения их одноимённых следов. Тогда  $M_1N_1$  и  $M_2N_2$  будут являться, соответственно, горизонтальной и фронтальной проекциями линии пересечения  $MN$  плоскостей  $P$  и  $Q$ .

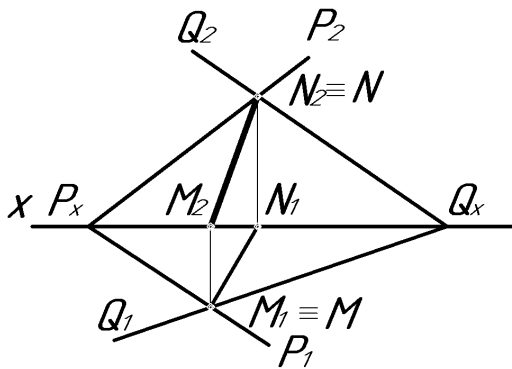


Рисунок 2.39.

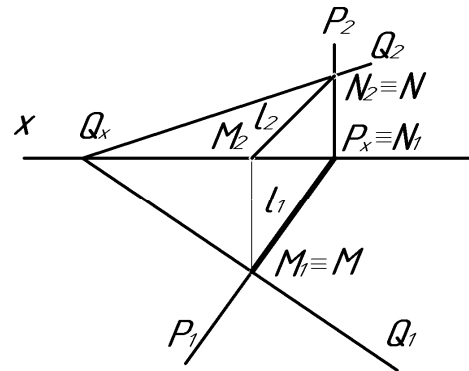


Рисунок 2.40.

Приведём примеры построения линии пересечения ( $MN$ ) двух плоскостей, заданных следами, когда одна из них или обе являются плоскостями частного положения.

На рис. 2.40 показан комплексный чертёж пересечения плоскости  $P$  общего положения с плоскостью  $Q$  горизонтально проецирующего положения -  $P(P_1;P_2) \cap (Q_1;Q_2)$ , линия их пересечения  $\ell$  [ $MN$ ] является прямой общего положения.

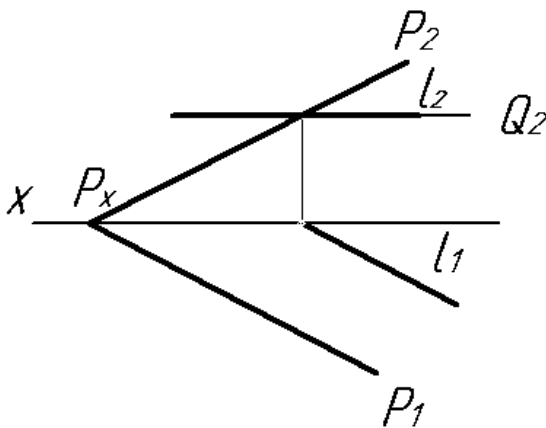


Рисунок 2.41.

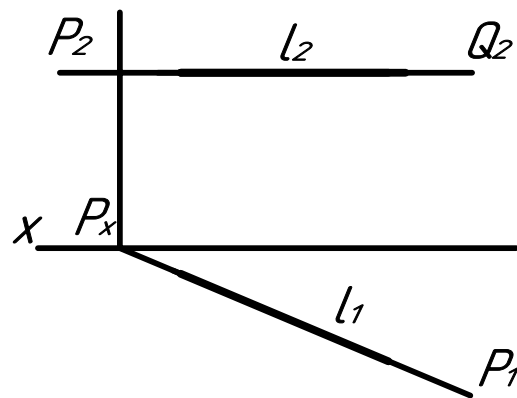


Рисунок 2.42.

На рис. 2.42 показан комплексный чертёж пересечения плоскости  $P$  горизонтально проецирующего положения с плоскостью  $Q$  горизонтального уровня -  $P(P_1;P_2) \cap (Q_1;Q_2)$ , линия их пересечения  $\ell$  является прямой горизонтального уровня.

На рис. 2.43 показан комплексный чертёж пересечения плоскостей P и Q одинаково горизонтально проецирующего положения -  $P(P_1;P_2) \cap (Q_1;Q_2)$ , следовательно и линия их пересечения  $\ell$  будет занимать такое же горизонтально проецирующее

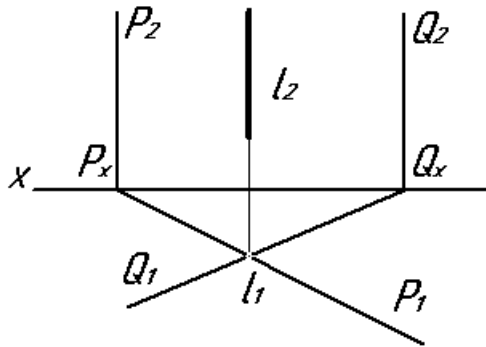


Рисунок 2.43.

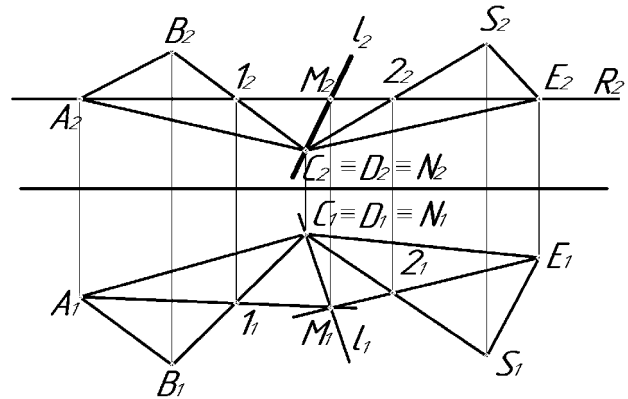


Рисунок 2.44.

положение.

Если же пересекающиеся плоскости ( или одна из них ) заданы не следами, то для построения их линии пересечения применяется метод вспомогательных секущих плоскостей.

Сущность этого метода состоит в том, что обе заданные плоскости (Рис. 2.44), например  $P(\triangle ABC)$  и  $Q(\triangle SDE)$  пересекаются третьей R (где  $R_2$  - фронтальный след вспомогательной секущей плоскости частного положения - горизонтального уровня). Затем строятся линии пересечения первой заданной плоскости с третьей (1A), второй заданной плоскости с третьей (2E). Там, где эти линии пересекаются и будет находиться общая точка M заданных плоскостей. При введении еще одной вспомогательной секущей плоскости находится вторая общая точка. В рассмотренном выше примере вторая общая точка уже есть, т.к.  $C \equiv D$  ( $C_1 \equiv D_1, C_2 \equiv D_2$ ), следовательно проведенные  $\ell_1$  и  $\ell_2$  являются горизонтальной и фронтальной проекциями линии пересечения двух плоскостей. Метод вспомогательных секущих плоскостей может быть применён для построения линии пересечения двух плоскостей и в том случае, если пересекающиеся плоскости заданы следами, но одна пара их следов или обе в пределах чертежа не пересекается (Рис. 2.45).

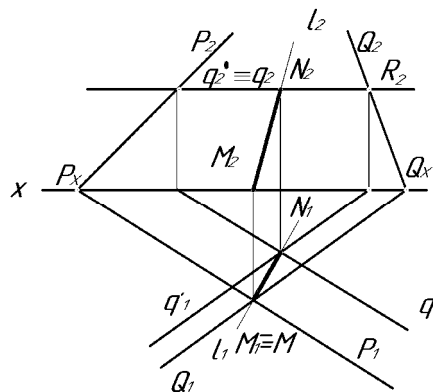


Рисунок 2.45.

### 2.2.6. Пересечение прямой и плоскости

Для определения точки пересечения (встречи) прямой с плоскостью общего положения применяется следующий алгоритм:

- через заданную прямую  $l$  (Рис. 2.46) проводится вспомогательная плоскость  $Q$  (обычно плоскость частного положения);
- строится линия пересечения  $MN$  заданной плоскости, например  $P(\triangle ABC)$  и вспомогательной  $Q$  (где  $Q_2$  – фронтальный след);
- в пересечении заданной прямой  $l$  с линией пересечения  $MN$  отмечается искомая точка встречи  $K$  прямой с плоскостью  $P$ .

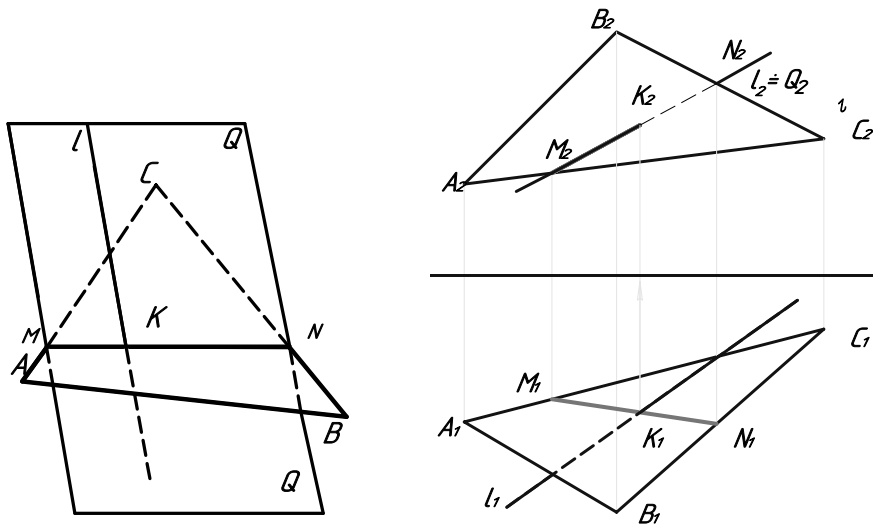


Рисунок 2.46

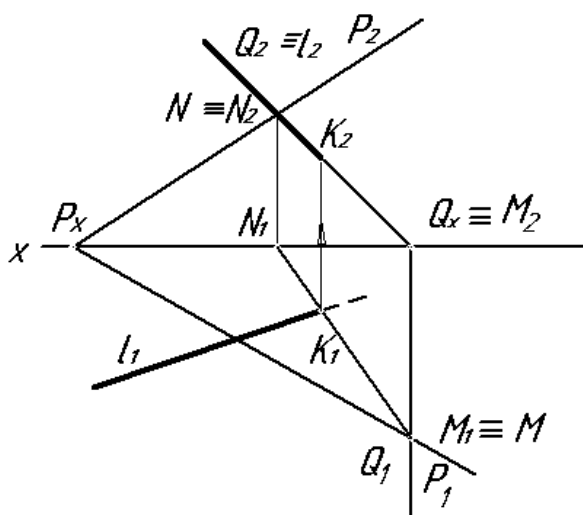


Рисунок 2.47.

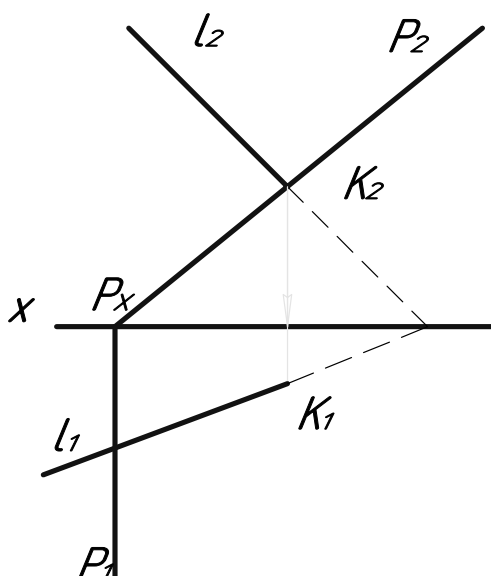


Рисунок 2.48

На рис.2.47 показан комплексный чертеж с определением точки  $K$  пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $P(P_1, P_2)$  общего положения по выше приведенному алгоритму (прямую  $l$  заключали во фронтально проецирующую плоскость  $Q(Q_1, Q_2)$ ).

Еще проще определяется точка встречи, если прямая общего положения пересекается с плоскостью частного положения, т.к. одна из проекций точки пересечения прямой с плоскостью всегда есть, она лежит на собирательном следе плоскости. На рис. 2.48 показан комплексный чертеж с определением точки  $K$  пересечения прямой  $\ell$  с плоскостью  $P(P_1, P_2)$  фронтально проецирующего положения. Видимость прямой относительно пересекаемой плоскости определяется методом конкурирующих точек.

## 2.3. Натуральная величина отрезка прямой

### 2.3.1. Определение натуральной величины отрезка прямой методом прямоугольного треугольника

Для определения натуральной величины отрезка прямой используют способ прямоугольного треугольника.

Сущность данного способа заключается в том, что натуральной величиной отрезка прямой является гипотенуза прямоугольного треугольника  $ABK$  (Рис. 2.49), прямой угол которого  $AKB$  образован проецирующим лучом  $BB_1$  и прямой  $AK$ . Следовательно, если на комплексном чертеже будет построена гипотенуза прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция прямой на плоскость проекций (так как  $AK = A_1B_1$ ), а вторым - разность расстояний от концов отрезка до этой же плоскости проекций (так как  $BK = BB_1 - AA_1$ ), т. е. разница аппликат концов отрезка прямой, то, тем самым, будет определена и натуральная величина отрезка.

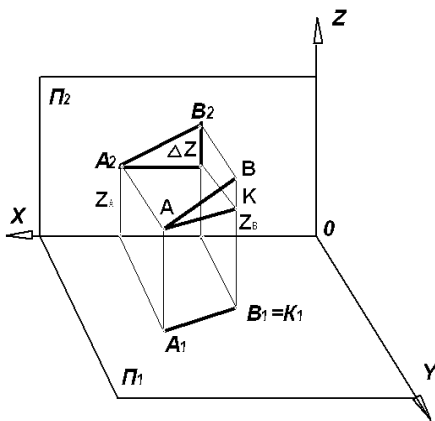


Рисунок 2.49.

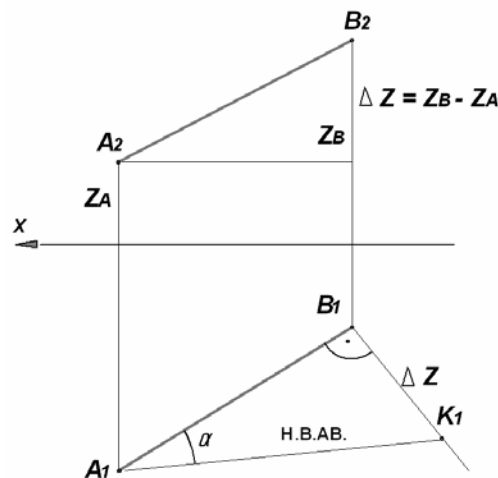


Рисунок 2.50.

На рис. 2.50 представлено определение натуральной величины прямой  $AB$  по её комплексному чертежу на горизонтальной плоскости проекции, где угол  $\alpha$  между горизонтальной проекцией прямой и её натуральной величиной является углом наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ . За первый катет прямоугольного треугольника принимали горизонтальную проекцию прямой  $A_1B_1$ , за второй катет  $A_1K_1$ , проведенный под прямым углом к первому катету, принимали расстояние равное разности аппликат

концов отрезка, т.е. разности координат по оси OZ ( $\Delta Z = Z_B - Z_A$ ). Гипотенуза полученного треугольника  $B_1K_1$  и является натуральной величиной прямой.

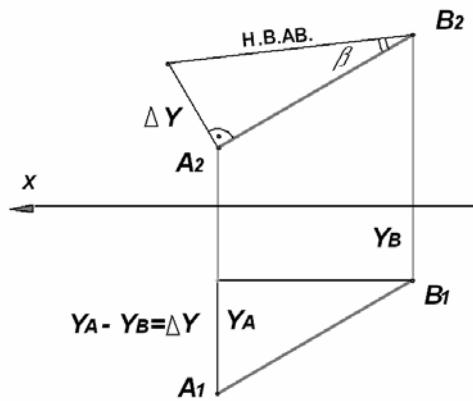


Рисунок 2.51.

Если в качестве первого катета взять фронтальную проекцию  $A_2B_2$  отрезка прямой  $AB$ , то второй катет, проведенный под прямым углом к первому катету, должен быть равен разности ординат концов отрезка, т.е. разности координат по оси OY ( $\Delta Y = Y_A - Y_B$ ). Гипотенуза полученного треугольника  $A_2K_2$  и является натуральной величиной прямой. На рис. 2.51 представлено определение натуральной величины прямой  $AB$  по комплексному чертежу на фронтальной плоскости проекции, где угол  $\beta$  между её фронтальной проекцией прямой и её натуральной величиной является углом наклона

прямой к фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ .

### 2.3.2. Определение натуральной величины отрезка прямой методом вращения

Сущность определение натуральной величины отрезка прямой методом вращения состоит в том, что сохраняя основную систему плоскостей проекций  $\Pi_1 - \Pi_2$  неизменной, проецируемому отрезку придают путем вращения вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций такое положение, при котором на комплексном чертеже будет получена его натуральная величина.

Для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения  $AS$ , выберем ось вращения перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций и проходящую через  $A_1$  (Рис. 2.52 а). Повернем отрезок так, чтобы он стал параллелен фронтальной плоскости проекций (горизонтальная проекция отрезка параллельна оси  $x$ ). При этом точка  $S_1$  переместится в  $S_1'$ , а точка  $A_1$  не изменит своего положения. Положение точки  $S_2'$  находится на пересечении фронтальной проекции траектории перемещения точки  $S$  (прямая линия параллельная оси  $x$ ) и линии связи проведенной из  $S_1'$ . Полученная проекция  $S_2'A_2$  определяет действительные размеры самого отрезка.

При вращении отрезка вокруг оси, перпендикулярной  $\Pi_2$ , фронтальная проекция доводится до положения, параллельного оси  $OX$ , а новая горизонтальная проекция даст длину отрезка (Рис. 2.52 б).

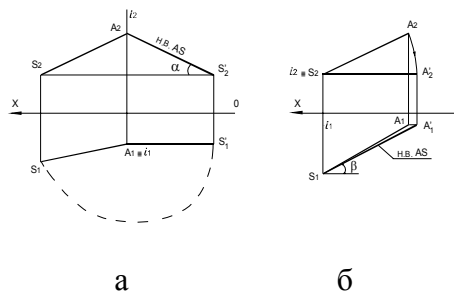


Рисунок 2.52.

## Вопросы для самоконтроля

1. Как определить на чертеже длину отрезка прямой линии.
2. Способ прямоугольного треугольника, для определения длины и углов наклона к плоскостям проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  отрезка прямой.
3. Как на чертеже определить углы наклона прямой к плоскостям проекций.
4. Определить расстояние от точки  $A(30, 25, 35)$  до осей  $X, Y, Z$ .
5. Задание плоскости на комплексном чертеже. Следы плоскости.
6. Точка и прямая в плоскости. Найти недостающие проекции точки и прямой принадлежащих плоскости.
7. Прямые особого положения в плоскости: горизонталь, фронталь, линия наибольшего ската.
8. Найти точку пересечения прямой "  $m$  " с плоскостью  $P(\Delta ABC)$ . Определить видимость прямой.
9. Способ нахождения точки пересечения прямой линии с плоскостью. Найти точку пересечения прямой "  $m$  " с плоскостью  $P(\Delta ABC)$ . Определить видимость прямой.
10. Как строится линия пересечения 2-х плоскостей? Покажите на примере двух плоскостей  $P(P_1, P_2)$  и  $Q(Q_1, Q_2)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная*

1. **Фазлулин, Э.М., Халдинов, В.А.** Инженерная графика / Э.М. Фазлулин, В.А. Халдинов. - М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 400 с.
2. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика. Часть I. Лабораторный практикум: уч. пособ. /А.Г. Герасимов. - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ» - Саратов: ИЦ «Наука», 2012. - 218 с.
3. **Чекмарев, А.А.** Инженерная графика / А.А. Чекмарев. - М. : Высшая школа, 2008. – 365 с.
4. **Герасимов, А.Г., Змеев, А.Я.** Курс начертательной геометрии. Учебное пособие с грифом УМО / А.Г. Герасимов, А.Я. Змеев. - Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2006. -188 с.

### *Дополнительная*

1. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Больнова, В.В.** Начертательная геометрия / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Больнова. - Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – 173 с.
2. **Герасимов, А.Г.** Методические указания и задания к выполнению модульной графической работы «Комплексное решение метрических и позиционных задач» / А.Г. Герасимов. - Саратов, ЦНТИ, 2006, – 24 с.
3. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины / А.Г. Герасимов, - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова», 2004. - 20 с.

### Лекция 3

## ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ МОНЖА. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ.

### 3.1. Комплексный чертеж поверхности

#### 3.1.1. Гранные поверхности.

Поверхность, образованная частями попарно пересекающихся плоскостей (гранями) называется многогранной. Элементами многогранной поверхности являются грани, ребра и вершины. Если все элементы многогранной поверхности располагаются по одну сторону плоскости совпадающей с любой его гранью, многогранник называется выпуклым. Совокупность всех ребер и вершин многогранника образует его сетку. Построение проекций многогранника сводится к построению проекций его сетки.

Простейшими многогранниками являются призмы и пирамиды. На рис. 3.1 представлены комплексные чертежи треугольной и шестиугольной призмы (Рис. 3.1, а, б),

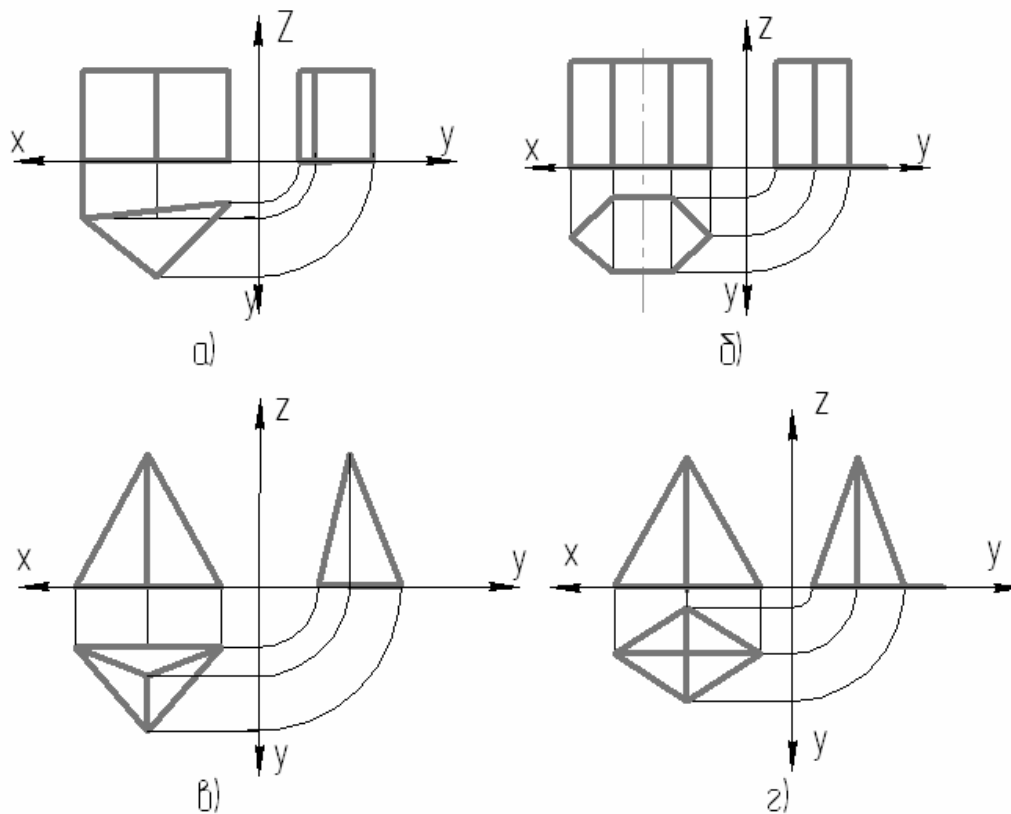


Рисунок 3.1.

треугольной и четырехугольной пирамиды (Рис. 3.1, в, г)

Если все грани многогранника одинаковые (конгруэнтные) и представляют собой равные многоугольники, то такие многогранники называются правильными. Различают пять правильных многогранников: тетраэдр, октаэдр, икосаэдр (состоят соответственно из 4, 8, 20 равносторонних и равных треугольников); гексаэдр, или куб (состоит из

шести равных квадратов); додекаэдр (состоит из двенадцати равносторонних и равных пятиугольников). Вокруг всех правильных многогранников можно описать сферу.

### 3.1.2. Поверхности вращения

Большая группа поверхностей образованных вращением плоской или пространственной кривой  $m$  (Рис. 3.2) вокруг неподвижной прямой – оси  $i$  и поэтому называемых поверхностями вращения, также относится к нелинейчатым. Каждая точка, например  $A, B, C$ , образующей  $m$  перемещается по окружности, называемой параллелью поверхности  $p$ . Плоскости всех параллелей  $p$  перпендикулярны к оси вращения  $i$ . Параллель, имеющая наибольший радиус, называется экватором  $p_э$ , а наименьший – горлом  $p_г$ . Любая плоскость, проходящая через ось  $i$ , пересекает поверхность вращения по меридиану, например  $m'$ . Если ось поверхности вращения параллельна плоскости проекций, то меридиан, расположенный в плоскости, параллельной этой плоскости проекций, называют главным меридианом  $m_г$ . Главный меридиан на эту плоскость проекций проецируется без искажения своего вида. Все меридианы поверхности вращения конгруэнтны. Через любую точку поверхности вращения проходит только одна параллель и только один меридиан. Множество всех параллелей и меридианов составляют собой каркас поверхности вращения.

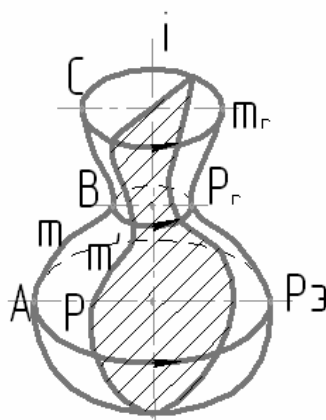


Рисунок 3.2.

Примером поверхностей вращения являются: сфера, эллипсоид вращения, параболоид вращения, одно и двухполостной гиперболоид вращения, тор.

Сферическая поверхность (шар) образуется вращением окружности вокруг ее диаметра.

Эллипсоид вращения, вытянутый или сжатый, образуется вращением эллипса соответственно вокруг его большой или малой оси.

Параболоид вращения (Рис. 3.3) образуется вращением параболы  $m$  вокруг ее оси  $i$ .

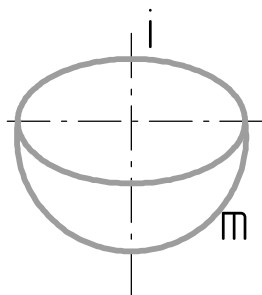


Рисунок 3.3

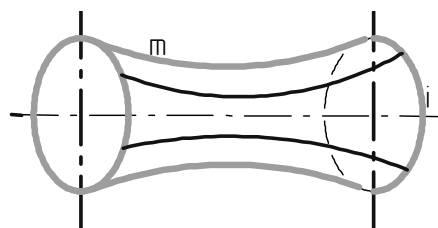


Рисунок 3.4

Однополостной гиперboloид вращения (Рис. 3.4) образуется вращением гиперболы  $m$  вокруг ее мнимой оси  $i$ .

Двухполостной гиперboloид вращения (Рис. 3.5) образуется вращением гиперболы  $m$  вокруг ее действительной оси  $i$ .

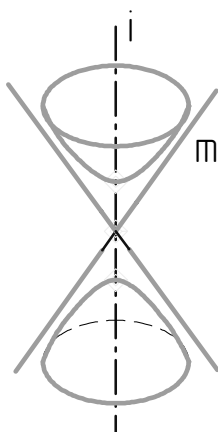


Рисунок 3.5.

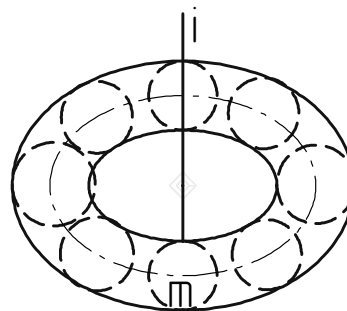


Рисунок 3.6.

Все рассмотренные поверхности вращения являются поверхностями второго порядка, т.к. образуются вращением кривых второго порядка вокруг их осей.

Торовая поверхность (Рис. 3.6) образуется вращением окружности (или ее дуги)  $m$  вокруг оси  $i$ , лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. Если при этом ось вращения располагается вне окружности тор называется открытым (или тор-кольцо), если касается или пересекает окружность тор называется закрытым. Торовая поверхность относится к поверхностям четвертого порядка, произвольная прямая пересекает его в четырех точках.

К поверхностям вращения относят также прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус, но это поверхности вращения с прямолинейной образующей, т.е. правильнее их нужно называть линейчатыми поверхностями вращения.

### 3.2. Построение проекций точек принадлежащих поверхности

Так как многогранная поверхность представляет собой совокупность отдельных граней – плоскостей, то построения принадлежащих поверхности точек сводится к построению точек принадлежащих плоскости.

Зная, что точка принадлежит плоскости если она лежит на прямой принадлежащей плоскости. На рис. 3.7 показано построение фронтальной проекции  $A_2$  точки  $A$ , принадлежащей грани  $SBD$  трехгранной пирамиды  $SBCD$ , по заданной горизонтальной проекции  $A_1$ .

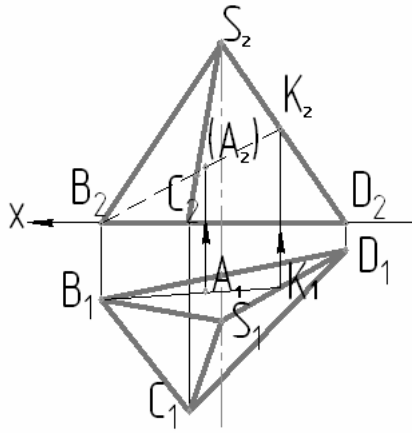


Рисунок 3.7.

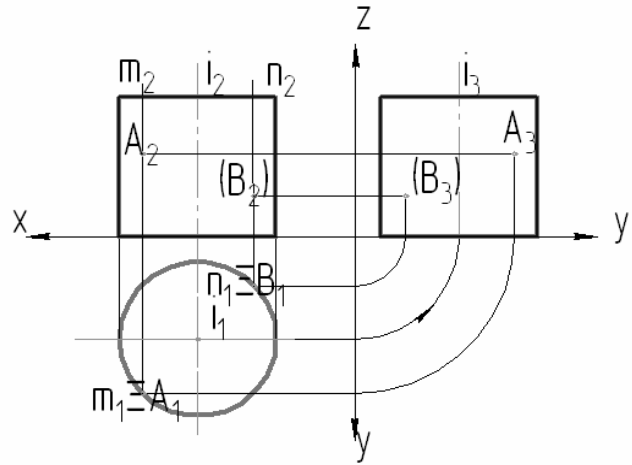


Рисунок 3.8.

В плоскости  $SBD$  через точку  $A$  проводится прямая  $BK$  принадлежащая этой плоскости, так как имеет с ней на чертеже две общие точки (точку  $A$  и точку  $K$ , лежащую на стороне  $SD$ ). Тогда на комплексном чертеже ее горизонтальная проекция  $B_1K_1$  пройдет через  $A_1$ . Фронтальная проекция  $B_2K_2$ , а затем и фронтальная проекция точки  $A_2$  получится построением с использованием л.п.с.. Так как на фронтальной плоскости проекций грань пирамиды  $SBD$  невидима, то проекция прямой  $B_2K_2$  проводится штриховой линией.

Для линейчатых поверхностей вращения построение принадлежащих им точек и их проекций, можно выполнить при помощи параллели или прямолинейной образующей, проходящих через эти точки.

На рис. 3.8 показано построение горизонтальных проекций  $A_1, B_1$  точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих поверхности прямого кругового цилиндра (который в системе трех плоскостей проекций на две из них спроецировался в виде равных прямоугольников), по заданным фронтальным проекциям  $A_2$  и  $B_2$ .

Проводя анализ расположений проекций точек  $A$  и  $B$  на фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ , можно сделать вывод, что точка  $A$  находится на видимой части поверхности цилиндра, а точка  $B$  – на невидимой, так как ее фронтальная проекция  $B_2$  заключена в круглые скобки.

Учитывая горизонтально проецирующее положение цилиндра (ось вращения  $i \perp \Pi_1$ ), можно сделать вывод, что горизонтальные проекции любых точек лежащих на боковой поверхности цилиндра будут расположены на его горизонтальной проекции (на окружности).

С другой стороны, зная, что через точку, расположенную на поверхности прямого кругового цилиндра можно провести только одну образующую, через фронтальные проекции  $A_2, B_2$  точек  $A$  и  $B$  проводятся фронтальные проекции  $m_2, n_2$  образующих  $m$  и  $n$  (параллельно проекции  $i_2$  оси вращения). Образующие поверхности  $m$  и  $n$  являются горизонтально проецирующими прямыми. Затем по л.п.с. определяются горизонтальные проекции этих образующих  $m_1, n_1$  (в виде точек лежащих на окружности) и совпа-

дающие с ними искомые горизонтальные проекции точек  $A_1, B_1$ . Профильные проекции точек  $A_3, B_3$  получают построениями с использованием также л.п.с..

Если бы на рис. 3.7 были заданы горизонтальные проекции точек  $A$  и  $B$  и требовалось построить их фронтальные проекции, то однозначно решить данную задачу не представлялось бы возможным. Так как горизонтальные проекции образующих  $m$  и  $n$  представляют собой геометрическое место множества конкурирующих точек этих прямых.

На рис. 3.9 показано построение горизонтальной проекций  $A_1$ , точки  $A$ , принадлежащей поверхности прямого кругового конуса (который в системе трех плоскостей проекций на две из них спроецировался в виде равнобедренных треугольников), по заданной фронтальной проекции  $A_2$ .

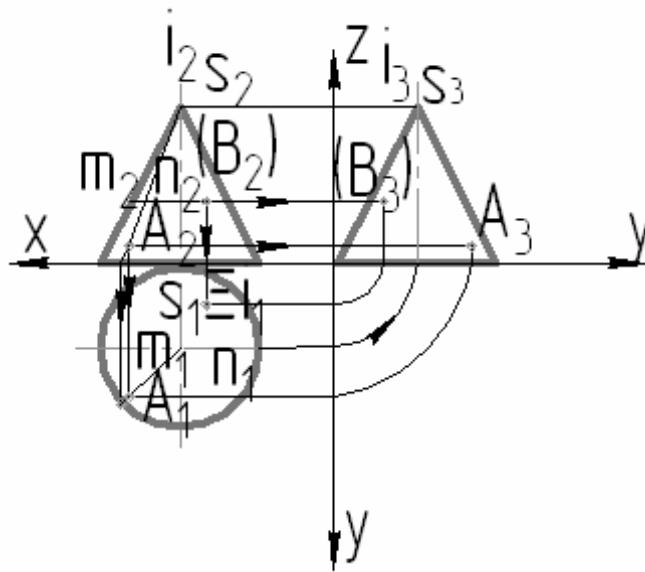


Рисунок 3.9.

Проводя анализ расположения проекции точки  $A$  на фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ , можно сделать вывод, что точка  $A$  находится на видимой части поверхности конуса, так как фронтальная проекция  $A_2$  точки не заключена в круглые скобки. Т.е. находится на видимой по отношению к  $\Pi_2$  части конической поверхности.

Для решения задачи на  $\Pi_2$  через фронтальную проекцию  $S_2$  вершины конуса  $S$  и  $A_2$  проводится фронтальная проекция  $m_2$  образующей  $m$ , пересекающая основание конуса в точке  $1_2$ . Затем по л.п.с. определяется положение горизонтальных проекций  $1_1, S_1$  через которые проходит горизонтальная проекция образующей  $m_1$  и на ней – искомая проекция точки  $A_1$ . Профильную проекцию точки  $A_3$  получают построениями с использованием также л.п.с..

Если бы на рис. 138 была задана горизонтальная проекция  $A_1$  точки  $A$  и требовалось построить ее фронтальную  $A_2$  проекцию, то построения проводились бы в обратном порядке. Т.е. сначала на  $\Pi_1$  проводится через  $A_1$  горизонтальная проекция образующей  $m_1$  от вершины к основанию, пересекающая точки  $1_1, S_1$ . Затем по л.п.с. определяется положение фронтальных проекций  $1_2, S_2$ , через которые проходит фронтальная проекция образующей  $m_2$  и на ней – искомая проекция точки  $A_2$ .

На этом же рис. 3.9 показано определение горизонтальной  $V_1$  проекции точки  $V$ , принадлежащей поверхности прямого кругового конуса, по заданной фронтальной проекции  $V_2$  при помощи параллели.

Проводя анализ расположения проекции точки  $V$  на фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ , можно сделать вывод, что точка  $V_2$  находится на невидимой части поверхности конуса, так как фронтальная проекция  $V_2$  точки заключена в круглые скобки. Т.е. находится на невидимой по отношению к  $\Pi_2$  части конической поверхности.

Для решения задачи, через фронтальную проекцию  $V_2$  проводится фронтальная проекция  $n_2$  параллели  $n$  (в виде отрезка, перпендикулярного фронтальной проекции  $i_2$  оси вращения  $i$ ). Длина этого отрезка равна натуральной величине диаметра окружности параллели. Используя радиус этой параллели (ось вращения делит отрезок-диаметр пополам) строится на  $\Pi_1$  горизонтальная проекция параллели  $n_1$  (в виде окружности) и по л.п.с. определяется искомое положение  $V_1$ . Профильную проекцию точки  $V_3$  получают построениями с использованием также л.п.с..

На рис. 3.10 показано построение горизонтальной проекций  $A_1$ , точки  $A$ , принадлежащей сферической поверхности с центром в точке  $O$  (которая в системе трех плоскостей проекций на все три плоскости спроецировалась в окружности, диаметры которых равны диаметру сферы), по заданной фронтальной проекции  $A_2$ . Проводя анализ расположения проекции точки  $A$  на фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ , можно сделать вывод, что точка  $A$  находится на видимой части поверхности сферы относительно главной меридианальной плоскости поверхности, так как фронтальная проекция  $A_2$  точки не заключена в круглые скобки.

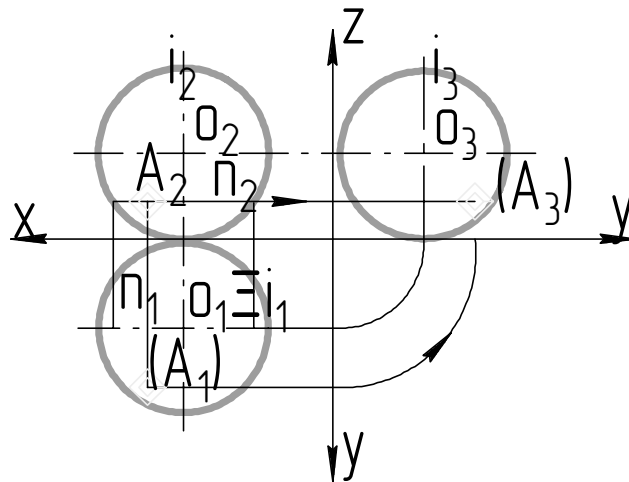


Рисунок 3.10.

Т.е. находится на видимой по отношению к  $\Pi_2$  части сферической поверхности. С другой стороны, ее фронтальная проекция  $A_2$  располагается ниже плоскости экватора сферы, т.е. находится на невидимой по отношению к  $\Pi_1$  части сферической поверхности и, следовательно, ее горизонтальная проекция  $A_1$  будет невидимой.

Для решения задачи на  $\Pi_2$ , через фронтальную проекцию  $A_2$  проводится фронтальная проекция  $n_2$  параллели  $n$  (в виде отрезка, перпендикулярного фронтальной проекции  $i_2$  оси вращения  $i$ ). Длина этого отрезка равна натуральной величине диаметра окружности параллели. Используя радиус этой параллели (ось вращения делит отрезок-диаметр пополам) строится на  $\Pi_1$  горизонтальная проекция параллели  $n_1$  (в виде окруж-

ности) и по л.п.с. определяется искомое положение  $A_1$ . Профильную проекцию точки  $A_3$  получают построениями с использованием также л.п.с..

### 3.3. Преобразование комплексного чертежа

Часто сложность решения позиционных и метрических задач начертательной геометрии зависит от положения заданных геометрических элементов относительно плоскостей проекций.

Если заданные геометрические элементы располагаются по отношению к плоскостям проекций в частном, наивыгоднейшем положении, решение задач становится проще.

Изменение комплексного чертежа, а точнее изменение относительного положения плоскостей проекций и геометрических элементов достигается двумя способами:

- способ замены плоскостей проекций (при неизменном в пространстве положении геометрических элементов система плоскостей проекций заменяется новой, по отношению к которой геометрические элементы будут находиться в наивыгоднейшем положении);
- способ вращения (заданные геометрические элементы вращают вокруг некоторой оси до наивыгоднейшего положения относительно плоскостей проекций, положение которых при этом остается неизменным).

#### 3.3.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность этого способа заключается в том, что одна из плоскостей проекций системы  $\Pi_2/\Pi_1$  (или последовательно обе) заменяется новой плоскостью, перпендикулярно к оставшейся. Положение заданных геометрических элементов в пространстве при этом не изменяется.

В системе  $\Pi_2/\Pi_1$  покажем точку  $A$  и её проекции (Рис.3.11). Затем введём новую плоскость проекций  $\Pi_4$ , перпендикулярно плоскости  $\Pi_1$ , и осуществим переход от системы  $\Pi_2/\Pi_1$  к системе  $\Pi_4/\Pi_1$ , т.е. мы построили новую фронтальную проекцию  $A_4$  точки  $A$  в системе  $\Pi_4/\Pi_1$ .

При этом положение горизонтальной проекции  $A_1$  точки  $A$  не изменилось, а фронтальная проекция  $A_4$  в системе  $\Pi_4/\Pi_1$  оказалась на таком же расстоянии от новой оси  $X_2$ , на каком находилась фронтальная проекция  $A_2$  точки  $A$  от оси  $X_1$  в системе  $\Pi_2/\Pi_1$ .

Следовательно, для того чтобы построить на комплексном чертеже новую фронтальную проекцию  $A_4$  точки  $A$ , мы должны из горизонтальной проекции  $A_1$  точки  $A$  провести перпендикуляр к новой оси  $X_2$  и от точки пересечения отложить расстояние от заменяемой проекции  $A_2$  до заменяемой оси  $X_1$  (Рис. 3.12).

Для того чтобы построить новую горизонтальную проекцию  $A_1$  точки  $A$ , мы должны из фронтальной проекции  $A_2$  точки  $A$  провести перпендикуляр к новой оси  $X_2$  и от точки пересечения отложить расстояние от заменяемой проекции  $A_1$  до заменяемой оси  $X_1$  (Рис. 3.13).

Обозначение осей и систем производят по правилу левой руки – наблюдатель находится на горизонтальной плоскости проекций, лицом разворачивается к фронтальной плоскости проекций и слева от новой оси наносит обозначения.

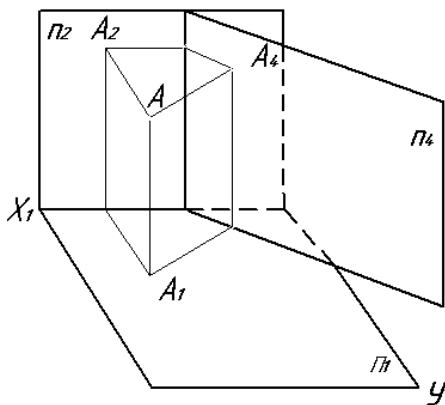


Рисунок 3.11.

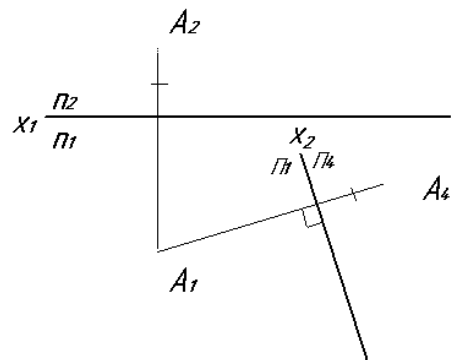


Рисунок 3.12.

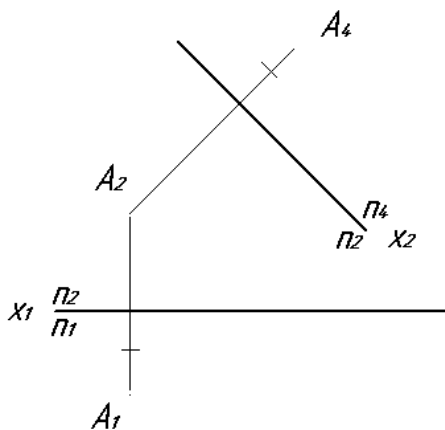


Рисунок 3.13.

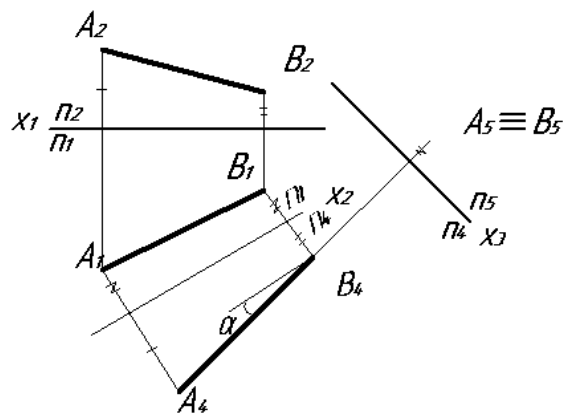


Рисунок 3.14.

Способом замены плоскостей проекций решают четыре основные задачи: 1) прямую общего положения переводят в прямую уровня; 2) прямую общего положения переводят в проецирующее положение; 3) плоскость общего положения переводят в проецирующее положение; 4) плоскость общего положения переводят в положение уровня.

При переходе от системы  $\Pi_2/\Pi_1$  к системе  $\Pi_4/\Pi_1$  (или к системе  $\Pi_2/\Pi_4$ ) новая плоскость проекций (новая ось проекций на комплексном чертеже) выбирается так, чтобы в новой системе заданные геометрические формы оказались в частных положениях.

Для решения первой задачи необходимо заменить плоскость проекций  $\Pi_1$  (или  $\Pi_2$ ) новой плоскостью проекций  $\Pi_4$ , параллельно отрезку прямой  $[AB]$  и перпендикулярно к неизменяемой плоскости проекций, чтобы  $[AB]$  в новой системе плоскостей проекций стала прямой фронтального (или горизонтального) уровня.

На комплексном чертеже проводим новую ось проекций  $X_2$  параллельно  $A_1B_1$  (Рис.3.14) или параллельно  $A_2B_2$  (Рис.3.15), т.к. в новой системе плоскостей проекций  $\Pi_4/\Pi_1$  или  $\Pi_2/\Pi_4$  одна из проекций прямой фронтального или горизонтального уровня всегда параллельна оси  $OX$  и по вышеприведенному правилу строим новые фронтальные (или горизонтальные) проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi_4$ . Новая проекция  $A_4B_4$  отрезка прямой равна его натуральной величине -  $[A_4B_4] = [AB]$ , а углы  $\alpha$  и  $\beta$  показывают углы его наклона, соответственно к плоскостям проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

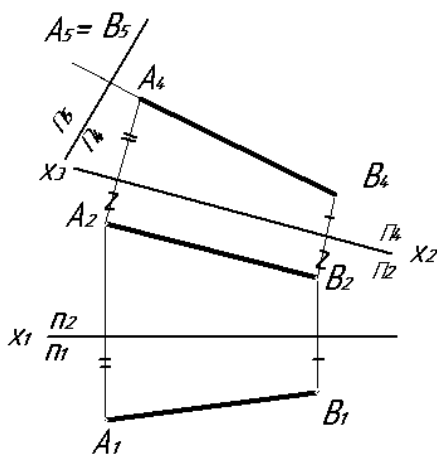


Рисунок 3.15.

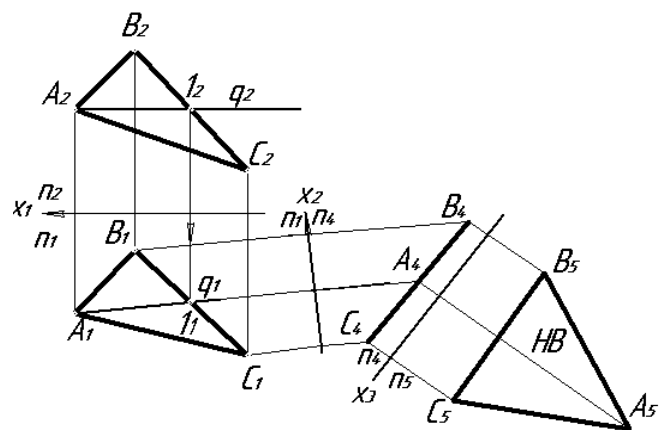


Рисунок 3.16.

Для решения второй задачи необходимо заменить одну из плоскостей проекций новой плоскостью проекций перпендикулярно к отрезку прямой  $[AB]$  и в, то же время, перпендикулярно к незаменимой плоскости проекций, чтобы  $[AB]$  в новой системе плоскостей проекций стала прямой проецирующего положения.

Но сразу, не нарушая условий способа замены плоскостей проекций, перевести прямую из общего положения в проецирующее нельзя. Необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. Вначале прямую переводят в положение уровня, описанными в первой задаче построениями, а затем в проецирующее положение.

Продолжим решение задачи на комплексном чертеже - проведем новую ось проекций  $X_3$  перпендикулярно  $A_4B_4$  (Рис. 3.14, 3.15), т.к. в новой системе плоскостей проекций  $\Pi_4/\Pi_5$  или  $\Pi_5/\Pi_4$  одна из проекций горизонтально или фронтально проецирующей прямой всегда перпендикулярна оси  $OX$  и по вышеприведенному правилу строим новые горизонтальные (или фронтальные) проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi_5$ . Новая проекция отрезка прямой  $A_5B_5$  спроецировалась в точку, т.к. расстояния от заменяемых проекций точек  $A_1$  и  $B_1$  или  $A_2$  и  $B_2$  до заменяемой оси  $X_2$  одинаковые. Следовательно, отрезок прямой  $AB$  общего положения сначала был переведен в положение фронтального уровня, а затем в горизонтально проецирующее положение (Рис. 3.14). А на рис. 3.15 переведен сначала в положение горизонтального уровня, а затем во фронтально проецирующее положение.

При решении третьей и четвертой задачи нужно помнить, что: а) в отличие от прямой, плоскость общего положения вначале нужно перевести в проецирующее положение, а затем проецирующую плоскость перевести в положение уровня, т.е. нужно выполнить две последовательные замены плоскостей проекций т.к. при одной замене будут нарушены условия метода замены плоскостей проекций (новая плоскость проекций, параллельная плоскости общего положения, не будет перпендикулярна ни одной из старых плоскостей проекций); б) все преобразования плоскости общего положения, в частности при переводе ее в проецирующее положение, нужно производить относительно ее главных линий – горизонтали  $g$  или фронтали  $f$ , т.к. две плоскости (плоскость общего положения и новая плоскость проекций) взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости и при этом, к тому же, выполняется условие метода замены плоскостей проекций (новая плоскость

проекций  $\Pi_4$  будет перпендикулярна одной из старых плоскостей проекций, т.к.  $g \parallel \Pi_1$ , а следовательно  $\Pi_4 \perp \Pi_1$  или  $f \parallel \Pi_2$ , а следовательно  $\Pi_4 \perp \Pi_2$ ).

На комплексном чертеже (Рис. 3.16) показано преобразование плоскости  $P(\triangle ABC)$  общего положения вначале в плоскость фронтально проецирующего положения (система плоскостей проекций  $\Pi_4/\Pi_1$ ), а затем в положение горизонтального уровня (система плоскостей проекций  $\Pi_4/\Pi_5$ ). При первой замене ось  $X_2 \perp g_1$ , при второй замене ось  $X_3 \parallel \triangle A_4 B_4 C_4$ , построение проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\Pi_4$  и  $\Pi_5$  согласно правилу.

На комплексном чертеже (Рис. 3.17) показано преобразование плоскости  $P(\triangle ABC)$  общего положения вначале в плоскость горизонтального уровня (система плоскостей проекций  $\Pi_2/\Pi_4$ ), а затем во фронтально проецирующее положение (система плоскостей проекций  $\Pi_4/\Pi_5$ ). При первой замене ось  $X_2 \perp f_2$ , при второй замене ось  $X_3 \parallel \triangle A_4 B_4 C_4$ , построение проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\Pi_4$  и  $\Pi_5$  согласно правилу.

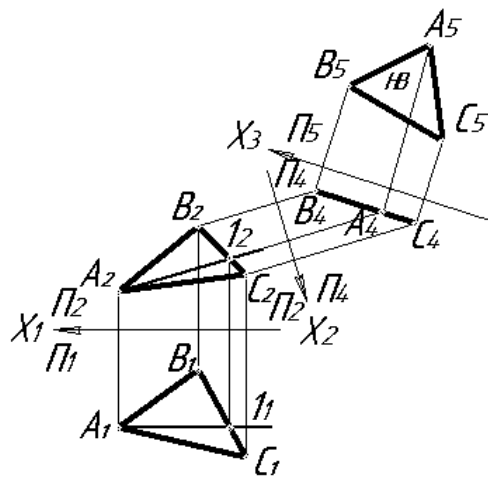


Рисунок 3.17.

После перевода плоскости  $P(\triangle ABC)$  общего положения в проецирующее положение (Рис. 3.16, 3.17) его проекция  $\triangle A_4 B_4 C_4$  вырождается в прямую линию, наклон которой покажет величины углов  $\alpha$  и  $\beta$  (углы наклона плоскости  $P(\triangle ABC)$  к плоскостям проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ). После перевода плоскости  $P(\triangle ABC)$  из проецирующего положения в положение уровня (Рис. 3.16, 3.17) его проекция  $\triangle A_5 B_5 C_5$  будет являться натуральной величиной треугольника.

### 3.3.2. Способ вращения

Сущность этого способа заключается в том, что заданные геометрические элементы вращают вокруг некоторой оси до наиболее выгодного положения. При этом все точки геометрических элементов перемещаются в пространстве по плоскостям, параллельным между собой. Поэтому данный способ называется еще способом плоскопараллельного перемещения. При этом проекции оси вращения на комплексном чертеже можно не показывать, а подразумевать их в любом удобном месте, что позволяет рационально размещать изображения на поле чертежа и не допускать их наложений.

### 3.3.3. Вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

Рассмотрим вращение точки  $A$  на заданный угол  $\varphi$  вокруг оси вращения  $i$  перпендикулярной плоскости проекций  $\Pi_1$  (Рис. 3.18), где  $O$  – центр вращения,  $r$ ,  $[AO]$  – радиус вращения,  $Q$  – плоскость вращения.

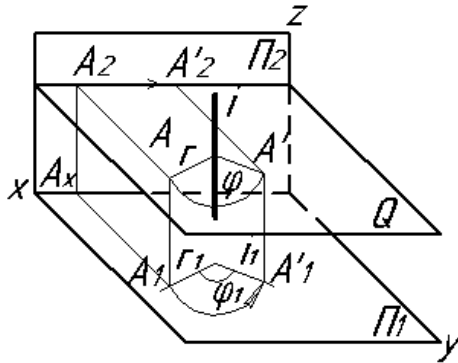


Рисунок 3.18.

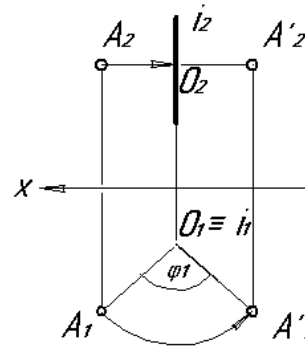


Рисунок 3.19.

При вращении горизонтальная проекция точки  $A_1$  будет перемещаться по дуге окружности, радиус которой равен радиусу вращения ( $r = r_1$ ,  $A_1O_1 = AO$ ) на тот же заданный угол ( $\varphi = \varphi_1$ ), т.к. вращение осуществляется в плоскости  $Q \parallel \Pi_1$ . А фронтальная проекция точки  $A_2$  перемещается по прямой параллельной оси  $OX$ . На рис. 3.19 эти же построения выполнены на комплексном чертеже. При вращении точки  $A$  вокруг оси  $i$  перпендикулярной плоскости проекций  $\Pi_2$  – наоборот (Рис. 3.20) фронтальная проекция точки  $A_2$  будет перемещаться по дуге окружности, а горизонтальная  $A_1$  – по прямой параллельной оси  $OX$ .

Очевидно, что для поворота прямой вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций, необходимо повернуть на заданный угол  $\varphi$  две принадлежащие ей точки.

На рис. 3.21 показан комплексный чертеж отрезка прямой  $[AB]$  общего положения и вращение его сначала вокруг воображаемой оси перпендикулярной  $\Pi_1$  до положения фронтального уровня ( $A_1B_1 = A'_1B'_1$ ;  $A'_1B'_1 \parallel$  оси  $Ox$ ,  $A'_2B'_2 = NB$  – по построению с использованием л.п.с.), а затем вокруг воображаемой оси перпендикулярной  $\Pi_2$  до горизонтально проецирующего положения ( $A''_2B''_2 = A''_2B''_2 \perp$  оси  $Ox$ ,  $A''_1 = B''_1$  – по построению с использованием л.п.с.).

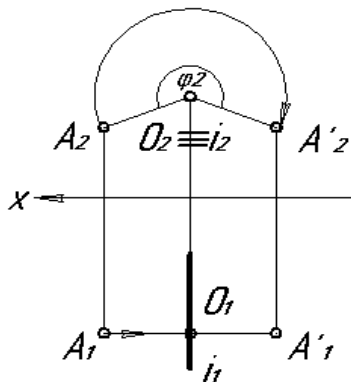


Рисунок 3.20.

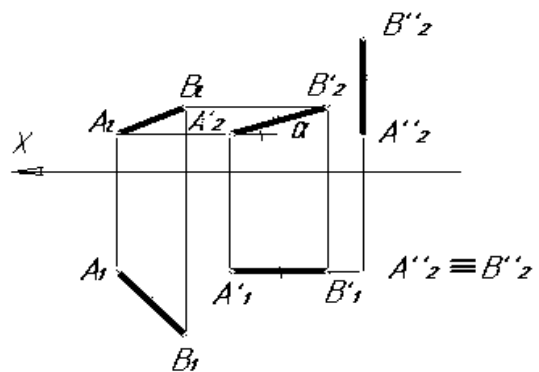


Рисунок 3.21.

Чтобы найти истинную величину плоской фигуры способом совмещения, нужно совместить с одной из плоскостей проекций ряд характерных точек её периметра.

На рис. 3.22 представлены комплексные чертежи плоскостей  $P(P_1, P_2)$  частного положения (соответственно, две плоскости горизонтально проецирующего и две плоскости фронтально проецирующего положения) и принадлежащей ей точки  $A$  и их совмещение с плоскостями проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

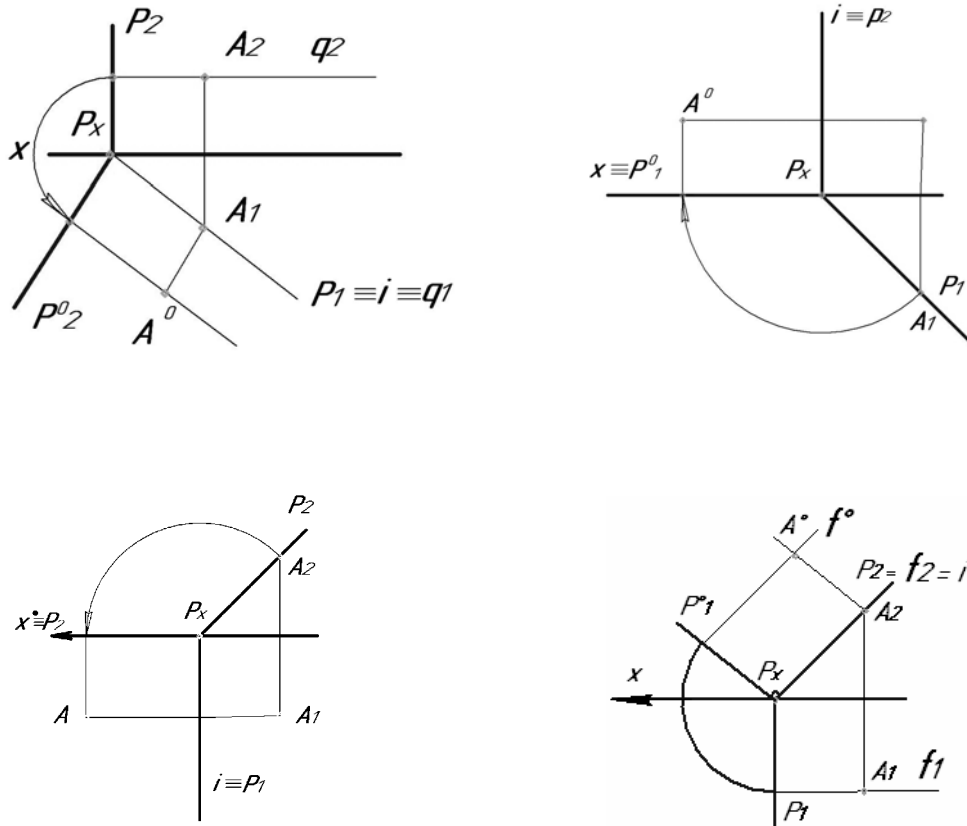


Рисунок 3.22.

### 3.4. Пересечение поверхностей плоскостью

В общем случае сечениями поверхностей многогранников являются ломаные линии, сечениями кривых поверхностей – кривые линии, проекции которых строятся по проекциям ряда точек принадлежащим как поверхности, так и секущей плоскости. При этом точки, образующие линию пересечения,

разделяются на опорные и промежуточные. Опорными точками являются: точки, принадлежащие участвующим в пересечении ребрам многогранника; точки, в которых линия пересечения пересекает линию видимого контура поверхности; экстремальные точки – самая верхняя и самая нижняя, самая близкая и самая дальняя относительно той или иной плоскости проекций. Если секущая плоскость занимает частное, например, проецирующее положение, и одна проекция точек линии пересечения получается без всяких построений, то для определения другой проекции нужно исходить из принадлежности точек данной поверхности.

При пересечении гранной поверхности плоскостью в общем случае в сечении получается многоугольник. Вершинами многоугольника являются точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью, а сторонами – отрезки прямых пересечения граней многогранника с секущей плоскостью. Т.е. построения сечения многогранника плоскостью можно свести к построениям точек пересечения прямой (ребер многогранника) с плоскостью или к построениям линии пересечения двух плоскостей (грани многогранника и секущей плоскости).

Чаще используют первое, как более простое решение. Найденные вершины сечения соединяют отрезками прямых, попарно для одной и той же грани многогранника. При этом, стороны сечения, лежащие в видимых проекциях граней многогранника на комплексном чертеже будут видимыми, а в невидимых – невидимыми.

На рис. 3.23 представлен комплексный чертеж сечения правильной пирамиды  $SABC$  фронтально проецирующей плоскостью  $P(P_1, P_2)$ . Вершины сечения точки 1, 2, 3 представляют собой точки пересечения ребер пирамиды  $SA, SB, SC$  с секущей плоскостью  $P$ , фронтальный след  $P_2$  которой является собирательным. Следовательно, положение фронтальных проекций  $1_2, 2_2, 3_2$  точек сечения выявляется без всяких дополнительных построений. Положение горизонтальных  $1_1, 2_1, 3_1$  и профильных  $1_3, 2_3, 3_3$  проекций точек сечения определяется на основании их принадлежности соответствующим прямым (ребрам) –  $SA, SB, SC$  с использованием л.п.с.. Полученные проекции вершин сечения попарно соединяют отрезками прямых с учетом их видимости относительно  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

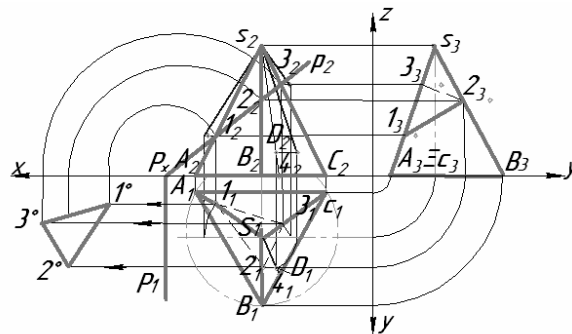


Рисунок 3.23.

Для построения линии пересечения кривой поверхности с плоскостью в общем случае используют вспомогательные секущие плоскости. Точки искомой линии определяются в пересечении линий, по которым вспомогательная секущая плоскость пересекает поверхность и плоскость. Поэтому при построении линии пересечения, часто полезно знать, что может иметь в сечении та или иная кривая поверхность.

При пересечении прямого кругового цилиндра вращения секущей плоскостью  $P$  от положения последней могут получиться: окружность (Рис. 3.24), где  $m_1, m_2$  – ее проекции на комплексном чертеже, если плоскость перпендикулярна оси цилиндра  $i$ ; прямоугольник (Рис. 3.25), где  $1_1 2_1 3_1 4_1, 1_2 2_2 3_2 4_2, 1^0 2^0 3^0 4^0$  – его проекции и натуральная величина, если плоскость параллельна оси цилиндра  $i$ ; эллипс (Рис. 3.26), где  $1_1 2_1 3_1 4_1, 1_2 2_2 3_2 4_2, 1^0 2^0 3^0 4^0$  – его проекции и натуральная величина, если плоскость расположена под углом к оси  $i$ . Натуральные величины сечений определены способом совмещения секущей плоскости  $P$  с плоскостью проекций.

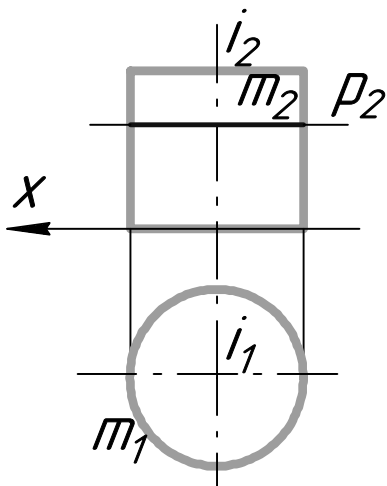


Рисунок 3.24.

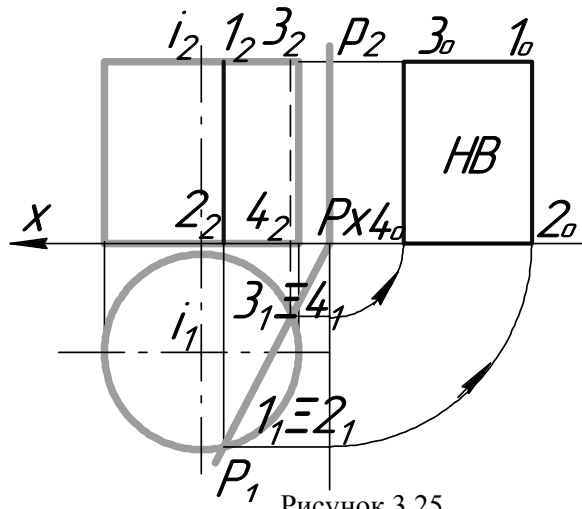


Рисунок 3.25

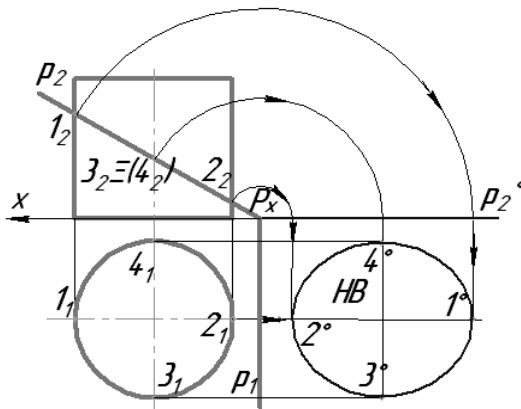


Рисунок 3.26.

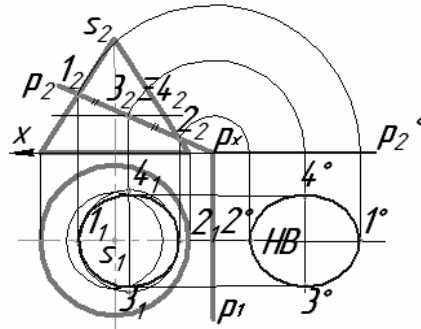


Рисунок 3.27.

При пересечении прямого кругового конуса вращения секущей плоскостью  $P$  от положения последней могут получиться: эллипс (Рис. 3.27), где  $1_1 2_1 3_1 4_1, 1_2 2_2 3_2 4_2, 1^{0^0} 2^{0^0} 3^{0^0} 4^{0^0}$  – его проекции и натуральная величина, если плоскость пересекает все образующие конуса вращения; окружность (Рис. 3.28), где  $m_1, m_2$  – ее проекции на комплексном чертеже, если плоскость перпендикулярна оси конуса  $i$  (частный случай); эллипс вырождается в точку, если плоскость проходит через вершину конуса (частный случай); гипербола (Рис. 3.29), где  $1_1 2_1 3_1 4_1, 1_2 2_2 3_2 4_2, 1^{0^0} 2^{0^0} 3^{0^0} 4^{0^0}$  – ее проекции и натуральная величина, если плоскость параллельна двум образующим конуса -  $\ell$  и  $(\ell')$ ; гипербола вырождается в две пересекающиеся прямые (Рис. 3.30), где  $S_1 1_1$  и  $S_2 1_1$ ,  $S_2 1_2$  и  $S_2 2_2$ ,  $S^0 1^0$ ,  $S^0 2^0$  – их проекции и натуральная величина, если плоскость пройдет через вершину конуса и основание (частный случай); парабола (Рис. 3.31), где  $1_1 2_1 3_1 4_1, 1_2 2_2 3_2 4_2, 1^{0^0} 2^{0^0} 3^{0^0} 4^{0^0}$  – ее проекции и натуральная величина, если плоскость параллельна одной образующей конуса -  $\ell$ ; парабола вырождается в прямую, если плоскость касается конуса по образующей (частный случай).

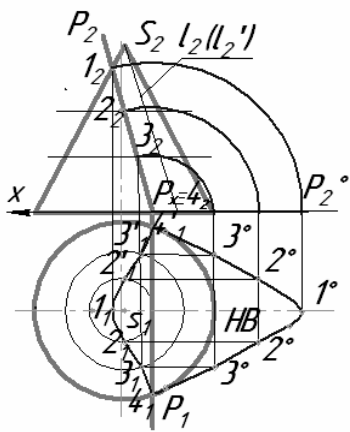


Рисунок 3.28.

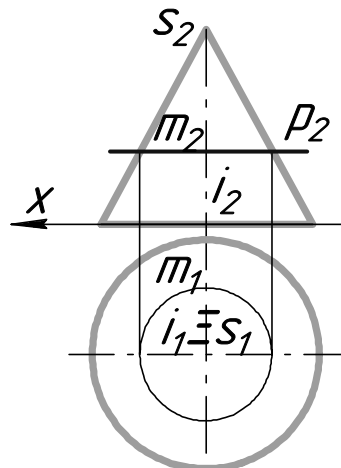


Рисунок 3.29.

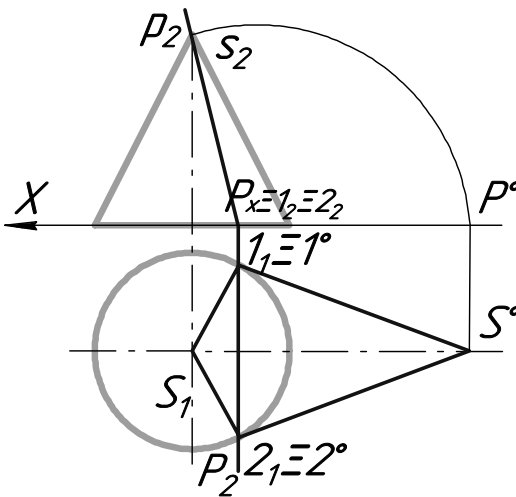


Рисунок 3.30.

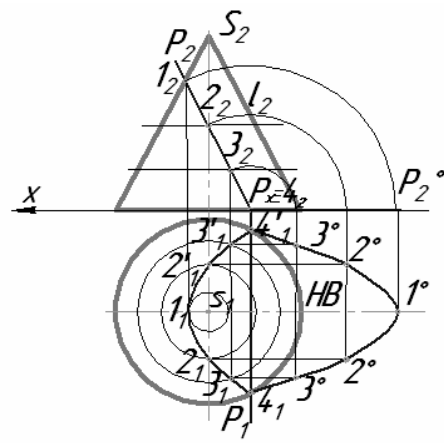


Рисунок 3.31.

При пересечении сферы секущей плоскостью  $P$  всегда в сечении имеем окружность. От положения секущей плоскости эта окружность спроецируется на одну из плоскостей проекций в прямую линию  $m_2$ , на другую – в натуральную величину  $m_1$ , если секущая плоскость параллельна плоскости проекций (Рис. 3.32); или спроецируется на одну из плоскостей проекций в прямую линию  $m_2$  (причем, середина расстояния  $m_2$ , определит положение центра сечения), а на другую – в виде эллипса  $m_1$ , если секущая плоскость перпендикулярна плоскости проекций (Рис. 3.33); или окружность спроецируется на все плоскости проекций в эллипс  $m_1, m_2$ , если секущая плоскость общего положения (Рис. 3.34).

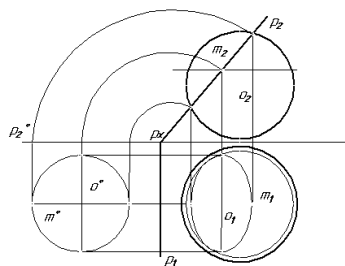


Рисунок 3.32.

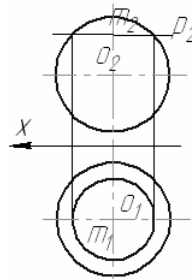


Рисунок 3.33.

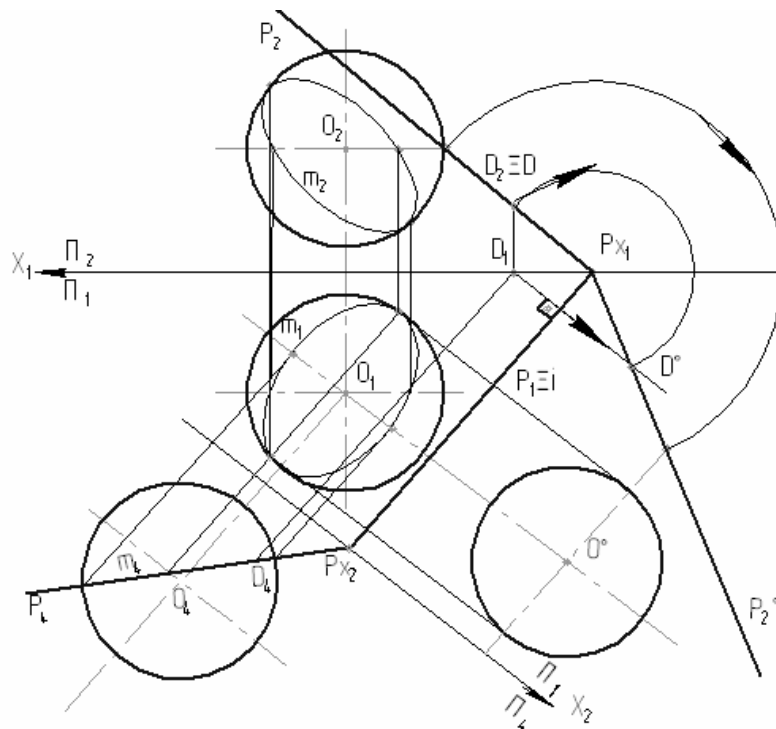


Рисунок 3.34

Натуральные величины сечений определены способом совмещения секущей плоскости  $P$  с плоскостью проекций.

### Вопросы для самоконтроля

1. Задание плоскости на комплексном чертеже. Следы плоскости.
2. Точка и прямая в плоскости. Найти недостающие проекции точки и прямой принадлежащих плоскости.
3. Прямые особого положения в плоскости: горизонталь, фронталь, линия наибольшего ската.
4. Как строится линия пересечения 2-х плоскостей? Покажите на примере двух плоскостей  $P(P_1, P_2)$  и  $Q(Q_1, Q_2)$ .
5. Способ замены плоскостей проекций. Заменой  $P_2$  на  $P_4$  определите длину отрезка прямой  $BC$ .
6. Преобразование чертежа способом плоско - параллельного перемещения геометрического образа.
7. Поворот плоскости вокруг ее следа. Приведите пример с определением натуральной величины прямой принадлежащей плоскости.
8. Изображение многогранников на чертеже. Привести примеры.
9. Изображение поверхностей вращения на чертеже. Привести примеры.
10. Построить натуральную величину сечения пирамиды при пересечении с фронтально - проецирующей плоскостью.
11. Построить натуральную величину сечения конуса при пересечении с фронтально - проецирующей плоскостью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная*

1. **Фазлулин, Э.М., Халдинов, В.А.** Инженерная графика / Э.М. Фазлулин, В.А. Халдинов. - М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 400 с.
2. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика. Часть I. Лабораторный практикум: уч. пособ. /А.Г. Герасимов. - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ» - Саратов: ИЦ «Наука», 2012. - 218 с.
3. **Чекмарев, А.А.** Инженерная графика / А.А. Чекмарев. - М. : Высшая школа, 2008. – 365 с.
4. **Герасимов, А.Г., Змеев, А.Я.** Курс начертательной геометрии. Учебное пособие с грифом УМО / А.Г. Герасимов, А.Я. Змеев. - Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2006. -188 с.

### *Дополнительная*

1. Стандарты ЕСКД.
2. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Больнова, В.В.** Начертательная геометрия / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Больнова. - Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – 173 с.
3. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А.** Сечение, развертка, изометрия поверхностей. Методические указания к выполнению модульной графической работы / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина. - Саратов, СГАУ, 2004. – 26 с.
4. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины / А.Г. Герасимов, - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова», 2004. - 20 с.

## Лекция 4

### ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК ПОВЕРХНОСТЕЙ. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

#### 4.1. Развертки поверхностей

Разверткой поверхности какого-либо тела называется фигура, полученная совмещением поверхности этого тела с плоскостью чертежа. Между поверхностью и ее разверткой существует точечное соответствие, т.е. конкретной точке лежащей на поверхности соответствует единственная точка на развертке, и наоборот.

Поверхность называется разvertyвающейся, если она как гибкая, но нерастяжимая и несжимаемая пленка может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов. Многогранные поверхности и кривые линейчатые поверхности с ребром возврата свойством разvertyваемости обладают, а линейчатые косые и нелнейчатые поверхности этим свойством не обладают.

Развертка гранной поверхности представляет собой плоскую фигуру, получаемую при совмещении всех ее граней с плоскостью. Следовательно, для построения развертки требуется определение натуральных величин всех ее ребер (боковых и сторон основания).

На рис. 4.1 представлена полная развертка вышерассмотренной пирамиды  $SABC$  с линией 1-2-3 пересечения ее секущей плоскостью в виде примыкающих друг к другу треугольников (боковых граней с общей вершиной  $S$  и основания  $ABC$ ).

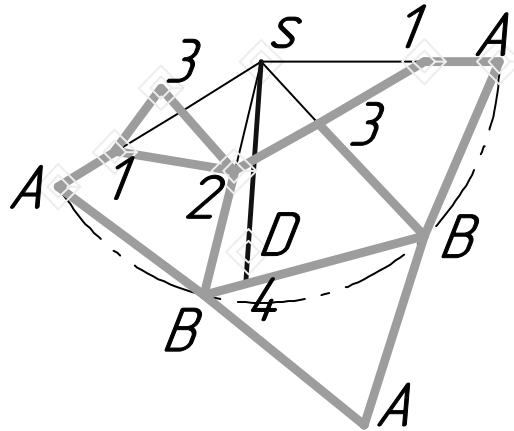


Рисунок 4.1.

Так как боковыми гранями любой пирамиды являются треугольники, то для их построения по трем сторонам необходимо сначала определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания пирамиды. Но учитывая то, что, в нашем случае, пирамида является правильной (все ее грани равны) и стороны ее основания спроецируются на плоскость  $\Pi_1$  в натуральную величину, так как занимают положение горизонтального уровня ( $A_2B_2, B_2C_2, A_2C_2 \parallel$  оси  $Ox$ ), эти определения проводить не нужно. Сразу строят четыре одинаковых,

равносторонних треугольника. А вот для определения на развертке точек 1, 2, 3 линии сечения потребуется определение натуральной величины отрезков  $[S1], [S2], [S3]$ . Для определения натуральной величины этих отрезков можно воспользоваться способом прямоугольного треугольника или способом вращения.

Для построения на развертке пирамиды произвольной точки  $D$ , принадлежащей, например, грани  $SBC$  (рис. 4.1), сначала строят прямую ( $S_4$ ) принадлежащую  $\Delta SBC$  и проходящую через точку  $D$  ( $D_1 \in S_1A_1, D_2 \in S_2A_2$ ). Затем эту прямую  $S_4$  и точку  $D$  на ней строят на развертке, откладывая соответственно натуральные величины отрезков  $[C_4]$  и  $[SD]$ .

Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник с высотой  $h$ , равной высоте цилиндра, и длиной  $L = \pi D$ , где  $D$  – диаметр цилиндра. Для построения на развертке боковой поверхности цилиндра линии среза (рис. 4.2) разбивают окружность основания на  $n$  равных частей (в нашем случае на восемь – I...VIII). Затем отмечают эти точки на развертке основания и восстанавливают в них перпендикуляры, на которых откладывают усеченные части соответствующих образующих (точки 1...8), начиная с наименьшей. Соединяя полученные точки плавной кривой, получают развернутое сечение цилиндра в виде синусоиды. Натуральная величина сечения и нижнего основания на рисунке не показаны.

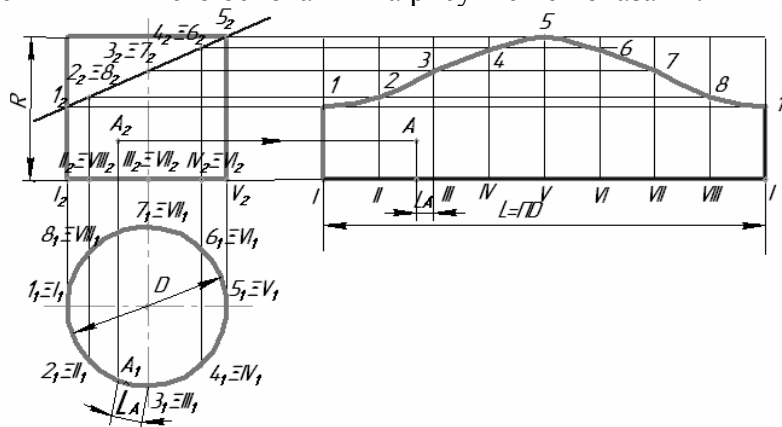


Рисунок 4.2

Для построения на развертке цилиндра произвольной точки  $A$ , принадлежащей его боковой поверхности, проводят образующую, на которой располагается точка  $A$ , на расстоянии  $l_A$ , измеренное по длине дуги окружности до ближайшей образующей точек разбивки основания на равные части, и на высоте  $h_A$ .

Полная развертка поверхности прямого кругового конуса состоит из развертки его боковой поверхности и окружности основания (рис. 4.3).

Развертка боковой поверхности представляет собой сектор, радиус которого равен длине  $L$  образующей конуса, а центральный угол сектора  $\varphi = 180^\circ D / L$  (где  $D$  – диаметр основания). Очевидно, что длина дуги сектора равна длине окружности  $\pi D$  основания конуса.

Для построения на развертке боковой поверхности конуса линии среза разбивают окружность основания на  $n$  равных частей (в нашем случае на восемь – I...VIII) и отмечают эти же точки на развертке. Затем через эти точки проводят образующие ( $S-I, \dots, S-VIII$ ) и их горизонтальные и фронтальные проекции на комплексном чертеже ( $I_1, \dots, VIII_1; I_2, \dots, VIII_2$ ). Отмечают фронтальные проекции точек 1...8 пересечения образующих конуса с секущей плоскостью ( $1_2, \dots, 8_2$ ); а горизонтальные проекции определяются по линиям проекционной связи на соответствующих образующих ( $1_1, \dots, 8_1$ ). На развертке боковой поверхности откладывают усеченные части соответствующих образующих (расстояния от вершины  $S$  до точек 1...8), начиная с наименьшей. Истинная величина этих отрезков определяется на комплексном чертеже вращением относи-

тельно оси конуса до положения фронтального уровня. При таком положении любая образующая совпадает с очерковой образующей, на которой и берется определяемая длина ( $S-1, \dots, S-8$ ). Соединяя полученные точки плавной кривой, получают развернутое сечение конуса.

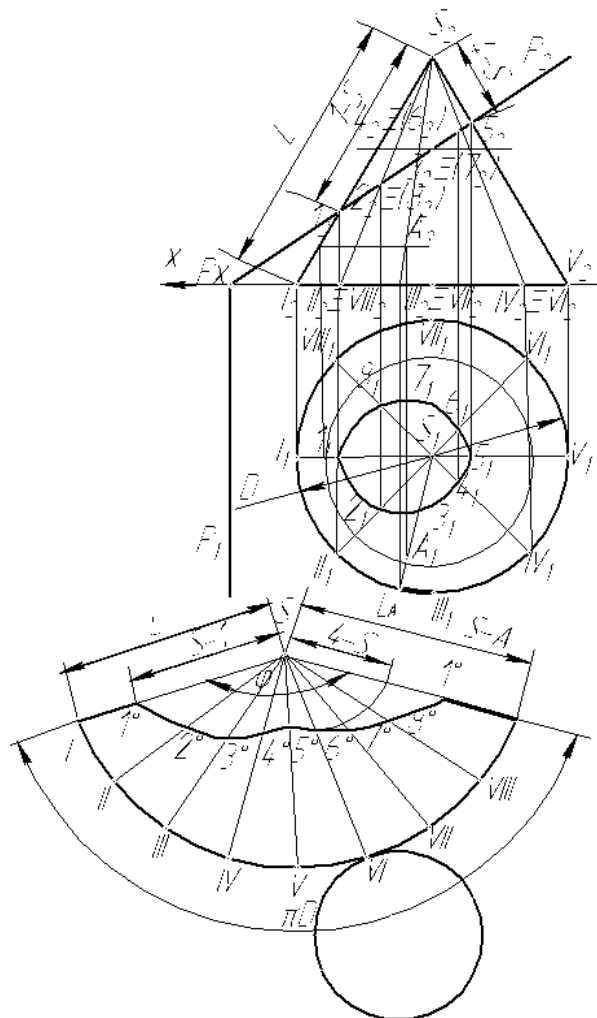


Рисунок 4.3.

Для построения на развертке конуса произвольной точки  $A$ , принадлежащей его боковой поверхности, сначала проводят образующую, на которой располагается точка  $A$ , на расстоянии  $\ell_A$ , измеренное по длине дуги окружности до ближайшей образующей точек разбивки ( $\Pi_1$ ) основания на равные части, а затем откладывают натуральную величину расстояния от вершины конуса до точки ( $S-A$ ). Натуральная величина сечения на рисунке не показана.

#### 4.2. Аксонометрические проекции

Чертеж, выполненный по методу ортогональных проекций, имеет малую наглядность и для его понимания требуется хорошо развитое пространственное воображение.

Есть чертежи, которые наглядно, то есть в трех измерениях передают пространственные формы предметов. Правда недостатком таких чертежей является то, что геометрические элементы предметов в них искажены.

Выполняют такие чертежи по методу аксонометрических проекций. Сущность метода заключается в том, что изображаемый предмет (точка, линия, фигура и т.д.) располагается по отношению к некоторой плоскости проекций (эту плоскость еще называют картинной) так, что при параллельном проецировании на нее вместе с координатными осями последние не проецируются на плоскость проекций в виде точки.

Процесс проецирования точки  $A$  вместе с координатными осями показан на рис.170, где плоскость  $\Pi$  – плоскость аксонометрических проекций. Отношение отрезка координатной оси к соответствующему отрезку аксонометрической оси называется коэффициентом искажения. Коэффициент искажения по оси  $OX$  равен  $K_x = OA_x/O_{\Pi}A_{x_{\Pi}}$ , коэффициент искажения по оси  $OY$  равен  $K_y = OA_y/O_{\Pi}A_{y_{\Pi}}$ , коэффициент искажения по оси  $OZ$  равен  $K_z = OA_z/O_{\Pi}A_{z_{\Pi}}$ .

В зависимости от расположения плоскости проекций и направления проецирования возможны случаи, когда коэффициенты искажения по всем трем осям окажутся равными  $K_x=K_y=K_z$ . В этом случае аксонометрические проекции называются изометрическими (изометрия). Если равными окажутся два коэффициента, которые не равны третьему  $K_x = K_z \neq K_y$ , то аксонометрические проекции называются диметрическими (диметрия). Если коэффициенты по всем трем осям не равны между собой  $K_x \neq K_y \neq K_z$ , то аксонометрические проекции называются триметрическими (триметрия).

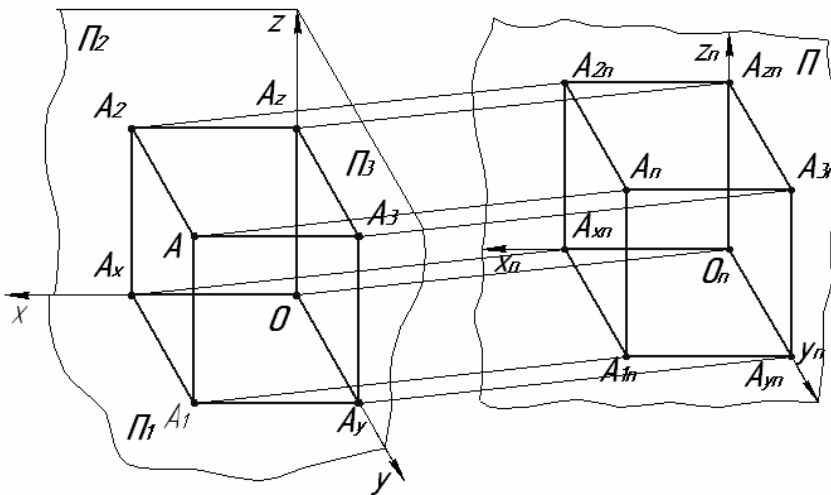


Рисунок 4.4.

АксонOMETрические проекции делятся на прямоугольные (когда направление проецирования составляет с плоскостью проекций прямой угол) и косоугольные.

ГОСТ 2.317-69 определяет пять стандартных аксонометрий из которых на практике чаще используют прямоугольные изометрические и диметрические проекции. В прямоугольной изометрии коэффициенты искажения меньше единицы, так как из основного уравнения прямоугольных аксонометрических проекций следует, что  $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2$ , откуда  $3K^2 = 2$  и  $K = \sqrt{2/3} = 0.82$ . Следовательно, при построении прямоугольной изометрической проекции размеры предмета, откладываемые по аксонометрическим осям, угол между которыми одинаков и равен  $120^\circ$  (см. рис. 171), ось  $OZ$  располагают обычно вертикально, умножают на 0.82. Такой перерасчет размеров неудобен и поэтому для упрощения используют не точные, а приведенные коэффициенты искажения равные единице. То есть по осям  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  откладывают размеры без искажения, в

натуральную величину. Получаемое изображение предмета в связи с этим оказывается увеличенным в 1.22 раза по отношению к его истинной величине.

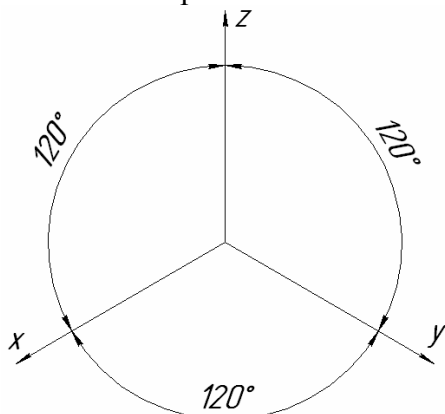


Рисунок 4.5.

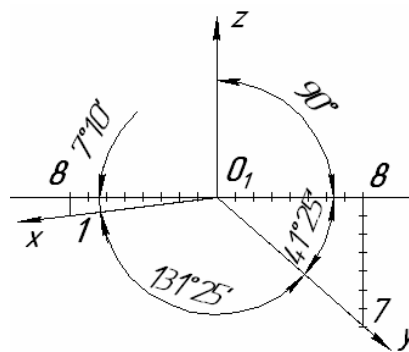


Рисунок 4.6.

Оси прямоугольных диметрических проекций  $OX$  и  $OY$  (Рис. 4.6) образуют с горизонталью углы  $7^{\circ} 10'$  и  $41^{\circ} 25'$ . Чтобы без помощи транспортира провести аксонометрические оси под этими углами, влево и вправо вдоль горизонтали откладывают восемь одинаковых отрезков и вниз, соответственно, один и семь таких же отрезков. Через полученные точки и точку  $O$  начала аксонометрических осей проводят оси  $OX$  и  $OY$ .

Точные показатели коэффициентов искажения в прямоугольной диметрической проекции по осям  $X$  и  $Z$  равны  $K_x = K_z = 0.94$ , а по оси  $Y$   $K_y = 0.47$ . Приведенные коэффициенты искажения, соответственно, равны  $K_x = K_z = 1.0$  и  $K_y = 0.5$ . Получаемое изображение предмета при использовании приведенных коэффициентов оказывается увеличенным в 1.06 раза по отношению к его истинной величине.

Окружность расположенная параллельно одной из плоскостей проекций в аксонометрических проекциях изображается в виде эллипса, большая ось которого всегда перпендикулярна оси не принадлежащей аксонометрической плоскости проекций, параллельной данной окружности.

В прямоугольной изометрической проекции три окружности диаметром  $d$ , параллельные плоскостям проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ , на аксонометрические плоскости проекций спроецируются в виде равновеликих эллипсов, большие оси которых  $AB = d$ , а малые  $CD = 0.58d$  при точных коэффициентах искажения. При приведенных  $AB = 1.22d$  и  $CD = 0.71d$  (Рис. 4.7).

Часто на практике при приведенных коэффициентах искажения размеры осей эллипса находят графическими построениями, а построение эллипса заменяют построениями четырехцентрового овала. На рис. 4.8 представлена окружность лежащая в плоскости  $\Pi_1$ .

Соединив соседние точки пересечения центровых линий получают величину малой оси эллипса  $CD$ . Проводя дуги радиусом  $CD$  попеременно из точек  $C$  и  $D$  в пересечении получают положение точек  $A$  и  $B$ , соединив которые получают величину большой оси эллипса  $AB$ .

При вычерчивании эллипса в аксонометрии (Рис. 4.9) проводят две окружности диаметрами  $AB$  и  $CD$ , обозначив большую ось эллипса  $AB$  перпендикулярно аксонометрической оси  $Z$ , так как окружность лежит в плоскости  $\Pi_1$ , а малую ось  $CD$  перпендикулярно большой оси. Из свободных от обозначения четырех точек пересечения двух окружностей с центровыми линиями, совпадающими по направлению с направлением осей эллипса, проводят дуги радиусами  $1C$ ,  $2D$ ,  $3A$ ,  $4B$ , которые образуют овал.

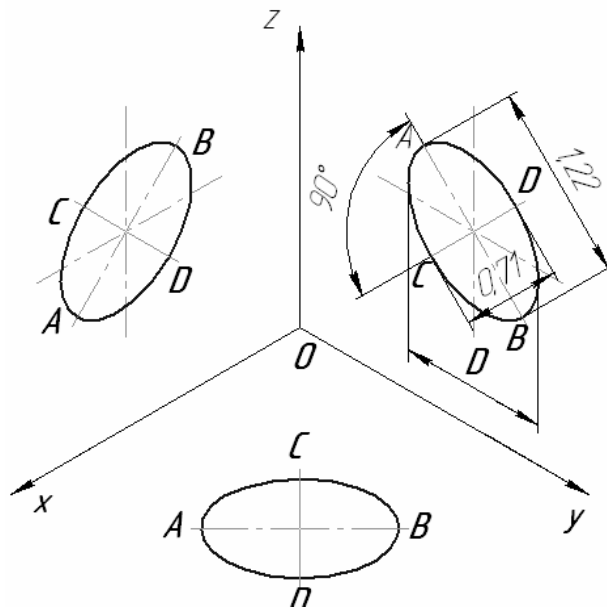


Рисунок 4.7.

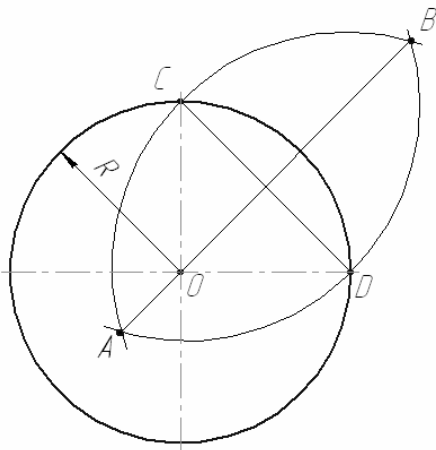


Рисунок 4.8.

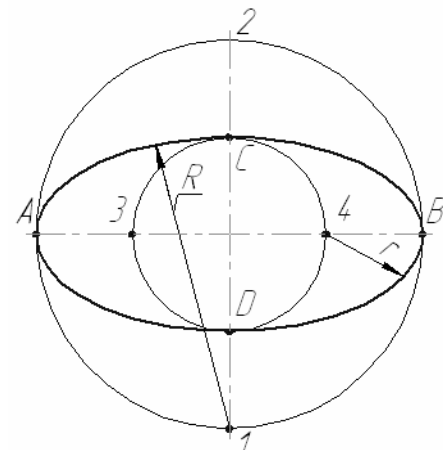


Рисунок 4.9.

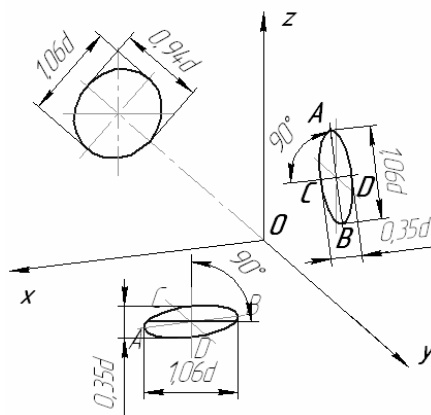


Рисунок 4.10

В прямоугольной диметрической проекции три окружности диаметром  $d$ , параллельные плоскостям проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ , на аксонометрические плоскости проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  спроецируются в виде равновеликих эллипсов, большие оси которых  $AB = d$ , а малые  $CD = 0.33d$  при точных коэффициентах искажения, при приведенных –  $AB = 1.06d$  и  $CD = 0.35d$  (рис. 4.10).

На аксонометрическую плоскость  $\Pi_2$  окружность спроецируется в эллипс, большая ось которого  $AB = d$ , а малая  $CD = 0.88d$  при точных коэффициентах искажения, при приведенных –  $AB = 1.06d$  и  $CD = 0.94d$ .

### Вопросы для самоконтроля

1. Построить проекции линии пересечения и развертку боковой поверхности усеченного цилиндра фронтально-проецирующей плоскостью.
2. Определить расстояние от точки  $M$  до поверхности цилиндра.
3. Что такое изометрия и какие коэффициенты искажения утверждены ГОСТ 2.317-68.
4. Построение прямоугольной изометрии усеченной поверхности по ее характерным точкам, взятым по координатам с комплексного чертежа.
5. Как проецируется окружность в изометрии, в диметрии. Правила построения овала из 4-х центров при построении аксонометрического изображения.
6. Построить изометрическое изображение окружности  $\phi 40$  мм принадлежащей плоскости  $\Pi_1$ .
7. Построить изометрическое изображение окружности  $\phi 60$  мм принадлежащей плоскости  $\Pi_2$ .
8. Построение аксонометрического изображения усеченной гранной поверхности.
9. Построение аксонометрического изображения усеченной поверхности вращения прямого кругового конуса.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

#### *Основная*

1. **Фазлулин, Э.М., Халдинов, В.А.** Инженерная графика / Э.М. Фазлулин, В.А. Халдинов. - М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 400 с.
2. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика. Часть I. Лабораторный практикум: уч. пособ. /А.Г. Герасимов. - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ» - Саратов: ИЦ «Наука», 2012. - 218 с.
3. **Чекмарев, А.А.** Инженерная графика / А.А. Чекмарев. - М. : Высшая школа, 2008. – 365 с.
4. **Герасимов, А.Г., Змеев, А.Я.** Курс начертательной геометрии. Учебное пособие с грифом УМО / А.Г. Герасимов, А.Я. Змеев. - Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2006. -188 с.

#### *Дополнительная*

1. Стандарты ЕСКД.
2. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Больнова, В.В.** Начертательная геометрия / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Больнова. - Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – 173 с.
3. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А.** Сечение, развертка, изометрия поверхностей. Методические указания к выполнению модульной графической работы / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина. - Саратов, СГАУ, 2004. – 26 с.
4. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины / А.Г. Герасимов, - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова», 2004. - 20 с.

## Лекция 5

### ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

#### 5.1. Пересечение прямой линии с поверхностью

Построение точек пересечения прямой линии с поверхностью осуществляется по следующему алгоритму (напомним, что алгоритмом называется совокупность последовательных операций, которые необходимо выполнить для решения задачи):

1. Через заданную прямую проводят вспомогательную секущую плоскость.
2. Строят проекции фигуры сечения поверхности этой плоскостью.
3. Отмечают точку пересечения прямой линии с соответствующей проекцией фигуры сечения.

При этом вспомогательную секущую плоскость нужно стремиться проводить так, чтобы фигуры сечения строились легко и с высокой точностью, то есть получались простыми в виде многоугольников и окружностей.

На рис.5.1 показано построение точек пересечения прямой АВ с поверхностью трехгранной пирамиды. Сначала прямую АВ заключили во фронтально проецирующую плоскость Р (где  $P_2$  - ее фронтальный след), а затем построили проекции фигуры сечения ( $\Delta 123$ ) поверхности пирамиды этой плоскостью. В пересечении горизонтальной проекции треугольника  $1_1 2_1 3_1$  с горизонтальной проекцией прямой  $A_1 B_1$  отметили горизонтальные  $M_1, N_1$ , а затем по линиям проекционной связи – фронтальные проекции  $M_2, N_2$  точек М и N пересечения прямой АВ с поверхностью пирамиды.

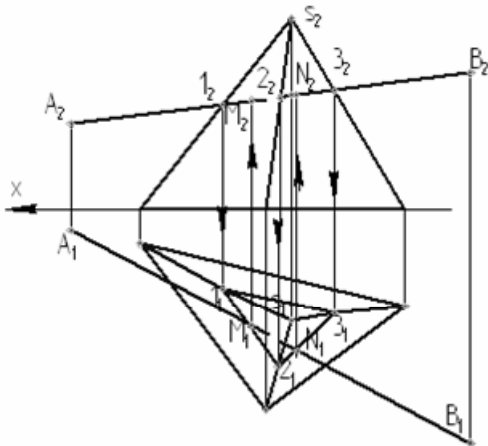


Рисунок 5.1.

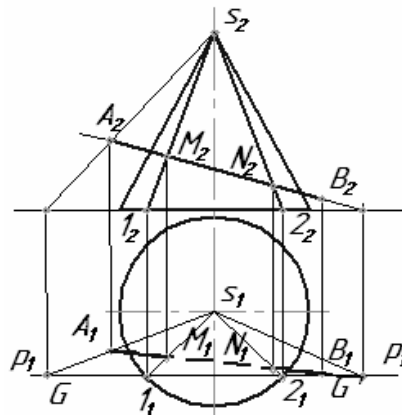


Рисунок 5.2.

Так как поверхность на комплексном чертеже считается непрозрачной, то видимость проекций прямой АВ относительно плоскостей проекций определяется по видимости граней пирамиды.

На рис. 5.2 показано нахождение проекций точек пересечения М и N прямой АВ общего положения с поверхностью прямого кругового конуса. Применение в качестве вспомогательной проецирующей плоскости в данном случае нецелесообразно, так как в сечении получится кривая второго порядка, которую построить с необходимой точностью затруднительно.

Плоскость же общего положения Р, проходящая через вершину конуса S и прямую АВ, пересечет его по образующим и будет задана двумя пересекающимися прямыми АВ и AS. Эта плоскость пересекает поверхность конуса по двум образующим S1 и S2,

проекции которых построены при помощи горизонтального следа секущей плоскости  $P_1$ , проходящего через горизонтальные следы  $G$  и  $G'$  пересекающихся прямых, соответственно  $AB$  и  $AS$ . Точки  $M$  и  $N$  – искомые.

На горизонтальной плоскости проекций отрезок прямой  $AB$  между точками  $M$  и  $N$  закрыт поверхностью конуса. На фронтальной плоскости проекций образующие  $S1$  и  $S2$  видимы. Следовательно, невидимый отрезок прямой  $AB$  находится между проекциями  $M_2$  и  $N_2$ .

На рис. 5.3 показано нахождение проекций точек пересечения  $M$  и  $N$  прямой  $AB$  общего положения с поверхностью сферы. В качестве вспомогательной применена горизонтально проецирующая плоскость  $P$  (где  $P_1$  – ее горизонтальный след). Окружность сечения сферы этой плоскостью спроецируется на  $\Pi_2$  в эллипс.

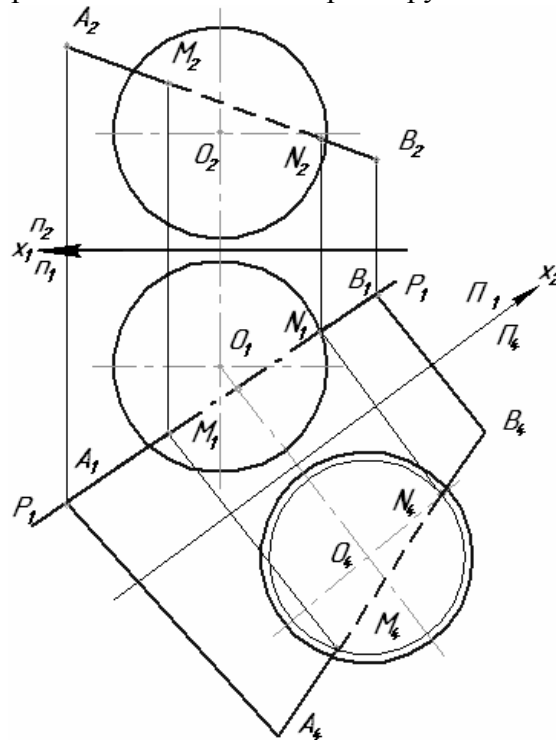


Рисунок 5.3.

Для избежания построения эллипса и тем самым получения более точного результата секущая плоскость  $P$  преобразована в плоскость фронтального уровня способом замены плоскостей проекций, то есть осуществлен переход от системы  $\Pi_2/\Pi_1$  к системе  $\Pi_4/\Pi_1$ . Тогда на плоскость проекций  $\Pi_4$  фигура сечения – окружность – спроецируется в натуральную величину, т. е. в виде окружности. Проекции  $M_4$  и  $N_4$  – фронтальные проекции искомых точек  $M$  и  $N$  в системе  $\Pi_4/\Pi_1$ . Проекции этих точек в системе  $\Pi_2/\Pi_1$  построены при помощи линий проекционной связи.

Зоны видимости участков прямой  $AB$  определяются расположением точек  $M$  и  $N$  на передней или задней полусфере (для фронтальных проекций), на верхней или нижней полусфере (для горизонтальной проекции).

## 5.2. Взаимное пересечение поверхностей

Форма большинства сложных деталей механизмов и машин образована сочетанием элементарных поверхностей, пересекающихся друг с другом.

Поэтому, при составлении технических чертежей, необходимо уметь строить проекции линий, по которым пересекаются эти поверхности.

Две поверхности пересекаются по линии или их совокупности, которая одновременно принадлежит каждой из них. Поэтому еще ее называют линией перехода одной поверхности в другую. В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть прямой, плоской или пространственной ломаной, плоской или пространственной кривой.

Построение линии перехода сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, в определенном порядке соединяющая эти точки, и будет искомой.

Основным способом построения точек, принадлежащих искомой линии пересечения, является способ вспомогательных поверхностей. В качестве вспомогательных поверхностей могут быть выбраны плоскость, сферическая, цилиндрическая или коническая поверхности. Наиболее часто применяются плоскости (способ вспомогательных плоскостей).

Сущность его заключается в том, что две пересекающиеся поверхности, например  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  (Рис.5.4) пересекаются третьей секущей вспомогательной поверхностью  $\Phi_3$ . Находятся линии пересечения  $m$  и  $n$  вспомогательной поверхности с каждой из заданных поверхностей. Точка пересечения  $F$  построенных линий  $m$  и  $n$  является точкой линии пересечения заданных поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

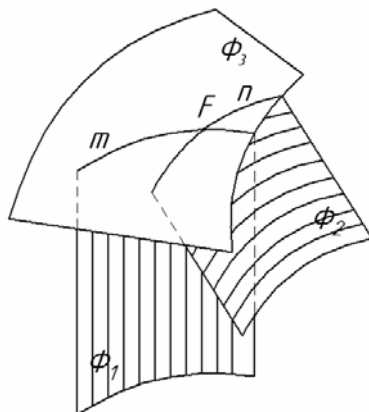


Рисунок 5.4.

Так как линии  $m$  и  $n$  принадлежат одной и той же вспомогательной поверхности  $\Phi_3$ , они могут пересекаться, касаться и не иметь общих точек. В последнем случае вспомогательная поверхность выбрана неудачно, т. е. вне места существования линии пересечения.

Многokrратно повторяя такие построения с помощью аналогичных вспомогательных поверхностей, определяют достаточное количество точек (опорных и промежуточных), принадлежащих линии пересечения.

Общий прием построения линии пересечения поверхностей будет иметь алгоритм:

1. Выбирается вид вспомогательных поверхностей
2. Строятся линии пересечения вспомогательных поверхностей с заданными поверхностями.
3. Находятся точки пересечения построенных линий, которые затем соединяют между собой.

Выбор вида и положения вспомогательных поверхностей определяется в основном тремя соображениями:

1. Необходимостью определения положения ряда опорных точек линии пересечения.

2. Вспомогательные поверхности должны пересекать каждую из заданных поверхностей по линиям, которые проецируются в графически простые линии – прямые, окружности.

3. Вспомогательные поверхности должны пересекать заданные поверхности в пределах зоны возможного расположения линии пересечения, чтобы избежать лишних построений.

Рассмотрим построение линии пересечения многогранников, двух кривых поверхностей (поверхностей вращения), многогранных и кривых поверхностей.

### 5.2.1. Взаимное пересечение многогранников

Многогранные поверхности пересекаются друг с другом в общем случае по пространственным замкнутым ломаными линиями, которые в частных случаях могут оказаться плоскими.

Однако во всех случаях вершинами ломаной будут точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника - с гранями первого, а сторонами - отрезки прямых, по которым пересекаются грани обоих многогранников. Решение задачи заключается в нахождении вершин или сторон ломаной. В первом случае задача сводится к многократному построению точки пересечения прямой (ребра) с плоскостью, во втором - к многократному построению линии пересечения двух плоскостей.

На практике часто используют комбинацию этих способов, исходя из условия простоты и удобства построения.

При решении задач определяют вершины ломаной (опорные точки линии пересечения), а затем соединяют - отрезками прямых те пары вершин, которые принадлежат одной и той же грани первого многогранника и одновременно одной и той же грани второго многогранника.

На рис. 5.5 показано построение линии пересечения прямой четырехугольной призмы ABCD и трехгранной пирамиды SEFT (случай полного проникания одной поверхности в другую). Призма своим основанием стоит на горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальные проекции ее вертикальных ребер преобразуются в точки, а грани боковой поверхности представляют собой горизонтально проецирующие плоскости.

Линия их пересечения проходит через точки 1, 2, 3, 4, 5, 6 пересечения ребер пирамиды с гранями призмы и точки 9, 10 пересечения ребра призмы A с гранями пирамиды SFE и STE. При определении точек 9, 10 через ребро A и вершину S пирамиды проводили вспомогательную плоскость P (где P<sub>1</sub> ее горизонтальный след) горизонтально проецирующего положения. Плоскость P пересекает пирамиду по прямым S7 и S8 с которыми в точках 9 и 10 пересекается ребро A. Соединяя каждые пары точек одних и тех же граней отрезками прямых, получили две линии пересечения многогранников – треугольник 1-2-3 и пространственный многоугольник 4-5-6-9-10.

Видимыми являются только те отрезки ломаной, которые принадлежат видимым граням многогранников; невидимые выполнены на комплексном чертеже штриховыми линиями.

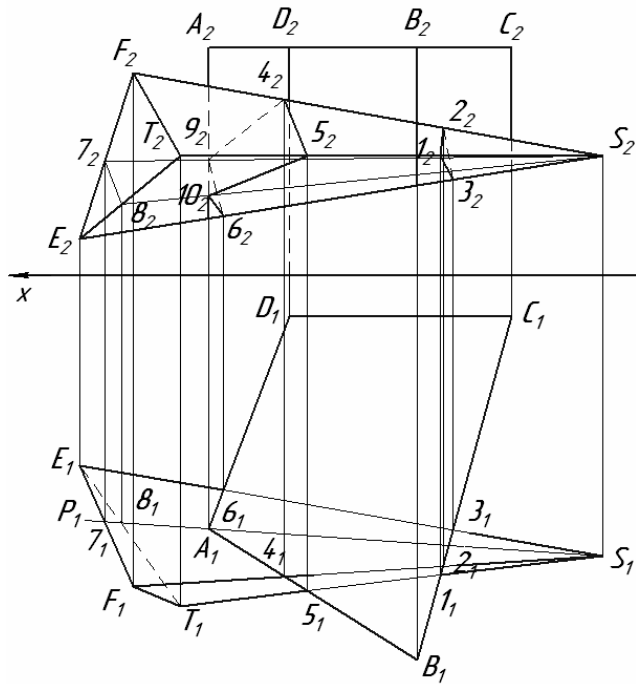


Рисунок 5.5.

В рассмотренном примере последовательность соединения точек излома линий пересечения поверхностей, а также видимость отдельных участков линий очевидна. Однако так бывает не всегда, особенно если пересекаются поверхности, имеющие много граней. В общем случае соединять отрезками прямых можно только те две точки, которые лежат на одной и той же грани каждого из заданных многогранников. Видимыми же участками будут только те, которые принадлежат одновременно видимым граням как первого, так и второго многогранника. Напомним, что видимость отдельных участков линий пересечения определяется отдельно для горизонтальной и фронтальной проекции.

### 5.2.2. Взаимное пересечение кривых поверхностей

Линия пересечения двух кривых поверхностей в общем случае представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две и более частей (случай проникания). Точки этой линии (опорные и промежуточные) определяются при помощи основного способа построения линии пересечения поверхностей.

На рис. 5.6 показано построение линии пересечения прямого кругового конуса и сферы. Характерные точки 1 и 2, являющиеся, соответственно высшей и низшей точками линии пересечения, построены с помощью вспомогательной секущей плоскости  $P$  фронтального уровня, проведенной через ось конуса и центр сферы.

Для нахождения проекций точек 3, 4 и 5, 6 проводили вспомогательные секущие плоскости горизонтального уровня. Причем одна из них ( $P$ ) проведена через центр сферы, благодаря чему получены горизонтальные проекции  $3_1, 4_1$ , а затем поднимаясь по л.п.с. до места введения вспомогательной секущей плоскости и фронтальные проекции  $3_2, 4_2$  характерных точек 3 и 4, определяющих границу видимости линии пересечения на горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ .

На рис. 5.7 показано построение линии пересечения двух цилиндров с использованием в качестве вспомогательных секущих поверхностей сфер.

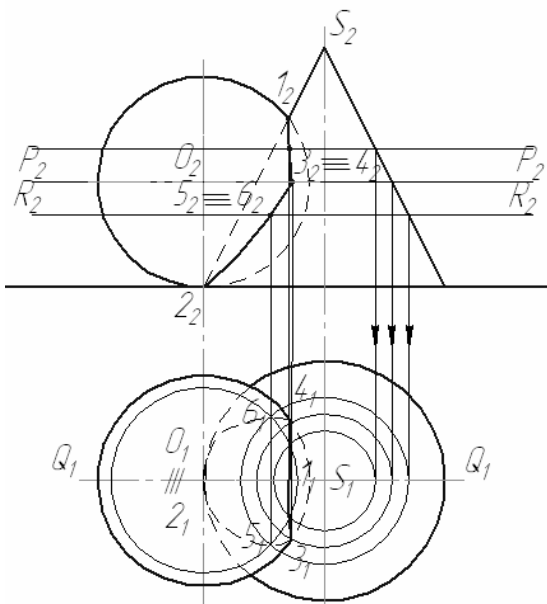


Рисунок 5.6.

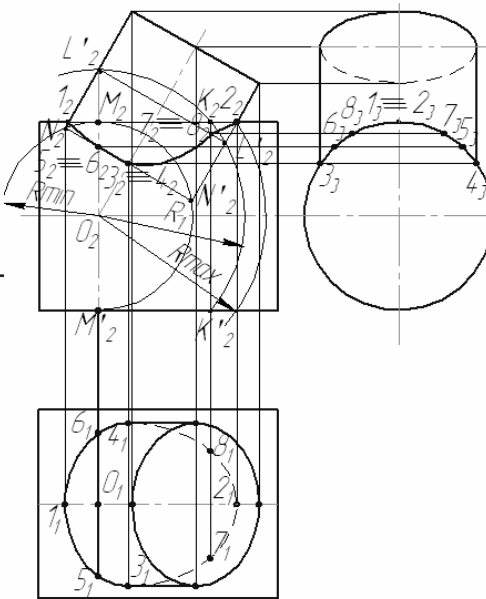


Рисунок 5.7.

Известно, что сфера, центр которой находится на оси поверхности вращения, пересекает эту поверхность по окружности. Если при этом ось поверхности вращения параллельна какой-либо плоскости проекций, то эта окружность спроецируется на нее в виде отрезка прямой линии, точное построение которого не вызывает никаких затруднений. На рис. 5.8 показаны аксонометрическое изображение и его фронтальная проекция пересечения сферой поверхностей вращения – цилиндра, конуса, сферы, оси которых проходят через центр сферы и параллельны плоскости проекций  $\Pi_2$ . Окружности, по которым пересекаются выше перечисленные поверхности вращения с поверхностью сферы, проецируются на  $\Pi_2$  в виде отрезков прямых.

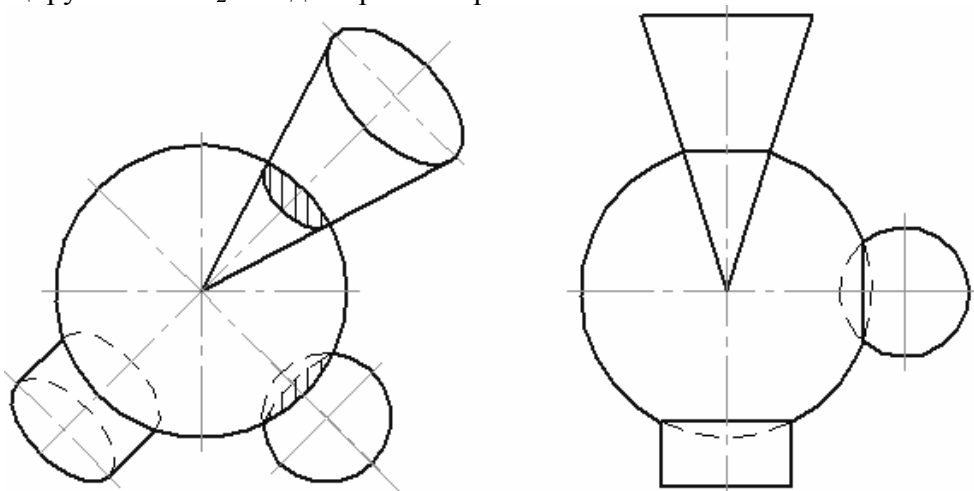


Рисунок 5.8.

Этим свойством пользуются для построения линии пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных концентрических сфер (с постоянным центром) или эксцентрических сфер (с переменным центром). Применение в качестве вспомогательных секущих поверхностей концентрических сфер при решении представленной на рис. 5.7 задачи возможно, так как соблюдаются три условия:

- 1) обе пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения;
- 2) оси пересекающихся поверхностей должны пересекаться, а точку пересечения принимают за центр вспомогательных (концентрических) сфер;
- 3) оси пересекающихся поверхностей должны быть параллельными одной из плоскостей проекций.

В нашем примере (рис. 5.7) обе пересекающиеся цилиндрические поверхности являются поверхностями вращения, их оси пересекаются в точке  $O$  и параллельны фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ . Профильная проекция линии пересечения уже имеется, так как она совпадает с профильной проекцией первого цилиндра, являющегося проецирующей поверхностью, ось которого перпендикулярна к профильной плоскости проекций  $\Pi_3$ . Поэтому без дополнительных построений, по линиям проекционной связи отмечены фронтальные и горизонтальные проекции характерных (опорных) точек линии пересечения 1, 2 и 3, 4 – соответственно, самой левой и самой правой, самой ближней и самой дальней. Проекции промежуточных точек 5 и 6 линии пересечения, определены вспомогательной секущей сферой радиусом  $R_{\min}$  касательной к одной поверхности (к поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна к  $\Pi_3$ ) и пересекающей другую (поверхность цилиндра, ось которого наклонна к  $\Pi_1$ ), с центром в точке  $O$  пересечения осей вращения пересекающихся цилиндрических поверхностей. Сфера радиуса  $R_{\min}$  пересекла цилиндр, ось которого перпендикулярна к  $\Pi_3$ , по окружности, фронтальной проекцией которой является отрезок  $M_2M'_2$ , а наклонный цилиндр – по окружности, фронтальная проекция которой – отрезок  $N_2N'_2$ . Фронтальные проекции точек 5 и 6 отмечены в пересечении этих отрезков. Горизонтальные проекции этих точек найдены по линиям проекционной связи через профильную проекцию изображения.

Вспомогательная секущая концентрическая сфера радиусом  $R_{\max}$  (максимальный радиус сферы от центра до наиболее удаленной точки очерковой  $2_2$ ) определит пределы величин радиусов до  $R_{\min}$  вспомогательных секущих концентрических сфер для получения необходимой точности с необходимым числом проекций точек линии пересечения. Так проекции еще двух промежуточных точек 7 и 8 линии пересечения определены аналогично вспомогательной концентрической сферой радиусом  $R_1$  в пересечении двух отрезков  $K_2K'_2$  и  $L_2L'_2$  (фронтальные проекции окружностей).

### 5.2.3. Взаимное пересечение кривых и многогранных поверхностей

Кривая и многогранная поверхности пересекаются по составной кривой, состоящей из нескольких плоских кривых, каждая из которых - результат пересечения граней многогранной поверхности с кривой поверхностью, а точки излома – точки встречи ребер многогранника с кривой поверхностью. В случае проникания эта составная кривая распадается на две части и более.

На рис. 5.9 показано построение на комплексном чертеже линии пересечения поверхностей прямого кругового конуса и трехгранной призмы.

Рассмотрев условие задачи, можно представить, что нижняя грань призмы пересекает поверхность конуса по дуге окружности, которая будет проецироваться на горизонтальную плоскость проекций в дугу окружности, на профильную плоскость проекций – в виде отрезка прямой, частично совпадающим с профильной проекцией нижней грани призмы, и на фронтальную плоскость проекций – в виде отрезка прямой, полностью совпадающим с фронтальной проекцией нижней грани призмы. Боковые грани призмы пересекают поверхность конуса по параболическим кривым, которые на горизонтальную и профильную плоскости проекций будут проецироваться в виде частей параболы,

а на фронтальную плоскость проекций – в виде отрезков прямых, полностью совпадающих с фронтальной проекцией боковых граней призмы.

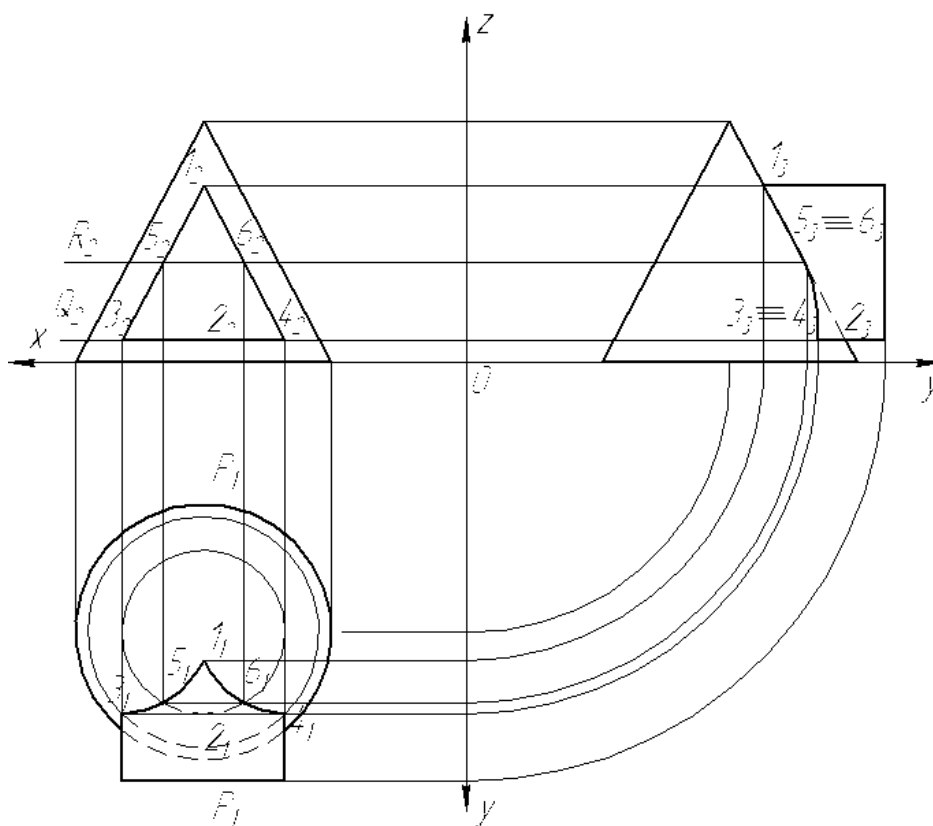


Рисунок 5.9.

Для построения опорных точек 1 и 2 (самая верхняя и самая нижняя), принадлежащих линии пересечения призмы и конуса, проведена вспомогательная плоскость  $P$  профильного уровня (где  $P_1$  - ее горизонтальный след). Плоскость  $P$  пересекает конус и призму по прямым, профильные проекции которых совпадают с очерковыми пересекающихся поверхностей (треугольник и прямоугольник). В пересечении этих очерковых отмечены профильные проекции точек 1 и 2. Горизонтальные и фронтальные проекции точек 1 и 2 определены по линиям проекционной связи, проведенных до линии введения вспомогательной секущей плоскости  $P$ .

Для построения опорных точек 3 и 4 (самая левая и самая правая), принадлежащих линии пересечения призмы и конуса, проведена через нижнюю грань призмы вспомогательная плоскость  $Q$  горизонтального уровня (где  $Q_2$  – ее фронтальный след). В пересечении плоскости  $Q$  с конусом и призмой получены соответственно сечения – окружность и прямоугольник, пересечение которых на горизонтальной плоскости проекций дает положение точек  $3_1$  и  $4_1$ . Фронтальные и профильные проекции точек 3 и 4 определены по линиям проекционной связи, проведенных до линии введения вспомогательной секущей плоскости  $Q$ .

Для построения проекций промежуточных точек 5 и 6, принадлежащих линии пересечения призмы и конуса, проведена вспомогательная плоскость  $R$  горизонтального уровня (где  $R_2$  – ее фронтальный след). В пересечении плоскости  $R$  с конусом и призмой получены соответственно сечения – окружность и прямоугольник (меньших размеров, чем при введении плоскости  $Q$ ), пересечение которых на горизонтальной плос-

кости проекций дает положение точек  $5_1$  и  $6_1$ . Фронтальные и профильные проекции точек 5 и 6 определены по линиям проекционной связи, проведенных до линии введения вспомогательной секущей плоскости R.

Рассмотренная выше задача может быть решена еще проще, так как одна из пересекающихся поверхностей (призма) занимает проецирующее положение к фронтальной плоскости проекций  $P_2$ . Следовательно, линия пересечения прямого кругового конуса и трехгранной призмы совпадает с фронтальной проекцией призмы. И тогда решение задачи сведется к построению недостающих горизонтальных и профильных проекций точек линии пересечения на одной из поверхностей по одной заданной проекции (в нашем случае имеющейся фронтальной проекции) линии перехода.

### Вопросы для самоконтроля

1. Как построить точки пересечения прямой с пирамидой. Привести пример.
2. Найти точки пересечения прямой "m" с поверхностью конуса. Привести пример.
3. Построить проекции линии пересечения конуса со сферой.
4. Использование вспомогательных сфер - посредников при построении линии пересечения поверхностей. Приведите пример.
5. Способ построения линии пересечения поверхностей вращения. Постройте проекции линии пересечения двух цилиндров.
6. Построить проекции линии пересечения конуса со сферой.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

#### *Основная*

1. **Фазлулин, Э.М., Халдинов, В.А.** Инженерная графика / Э.М. Фазлулин, В.А. Халдинов. - М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 400 с.
2. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика. Часть I. Лабораторный практикум: уч. пособ. /А.Г. Герасимов. - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ» - Саратов: ИЦ «Наука», 2012. - 218 с.
3. **Чекмарев, А.А.** Инженерная графика / А.А. Чекмарев. - М. : Высшая школа, 2008. – 365 с.
4. **Герасимов, А.Г., Змеев, А.Я.** Курс начертательной геометрии. Учебное пособие с грифом УМО / А.Г. Герасимов, А.Я. Змеев. - Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2006. -188 с.

#### *Дополнительная*

1. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Больнова, В.В.** Начертательная геометрия / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Больнова. - Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – 173 с.
2. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А.** Методические указания к выполнению модульной граф. работы "Пересечение поверхностей" / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина. - Саратов, СГАУ, 2004. -18 с.
3. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины / А.Г. Герасимов, - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова», 2004. - 20 с.

## Лекция 6

### ЗАДАНИЕ КРИВОЙ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ МОНЖА. ОФОРМЛЕНИЕ ЧЕРТЕЖЕЙ. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ДЕТАЛЕЙ. ИЗОБРАЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ДЕТАЛЕЙ

#### 6.1. Комплексный чертеж кривой

Кривые линии широко применяются в архитектуре и строительстве, а также, при проектировании деталей машин в машиностроении (профиль кулачка, зубьев зубчатых колес, профили передающих механизмов). Кривые линии могут быть результатом пересечения поверхностей.

Кривые линии разделяются на два вида:

- плоские кривые (все точки которых располагаются в одной плоскости, например: окружность, эллипс, синусоида и т.д.); пространственные кривые (точки которых не принадлежат одной плоскости, например: винтовые линии, линии пересечения двух криволинейных поверхностей в общем случае и т.п.).

Одной из характеристик кривой является ее порядок. Порядок кривой линии равен степени ее уравнения, или наибольшему числу точек пересечения кривой с прямой линией (как действительных, так и мнимых) для плоских кривых, или наибольшему числу точек пересечения кривой с плоскостью для пространственных кривых. Прямую линию, имеющую уравнение первой степени, можно рассматривать как линию первого порядка. Примером кривых второго порядка являются окружность, парабола, гипербола и т.п.

Построение проекций кривой линии сводится к построению проекций ряда ее точек. В общем случае проекцией кривой линии является кривая линия.

#### 6.2.. Основные понятия и определения плоских кривых

Если рассматривать кривую линию как траекторию движущейся точки, то направление движения точки в данный момент времени совпадает с направлением касательной к кривой в данной точке (Рис. 6.1).

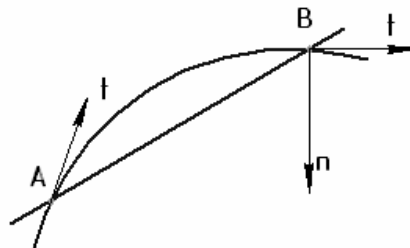


Рисунок 6.1.

Касательная – это предельное положение секущей (AB), когда одна точка пересечения (A) стремится слиться с другой точкой (B), т.е. это прямая, соединяющая две бесконечно близкие точки. Прямая, пересекающая кривую линию в одной, двух и более точках, называется секущей.

Нормалью к кривой (AB) называется прямая n, перпендикулярная к касательной t и проходящая через точку касания (B).

Обыкновенной точкой кривой называется точка в которой можно провести единственную касательную определенного направления. Особой точкой кривой называется точка в которой можно провести две и более касательных.

На рис. 6.2 приведены соответственно некоторые виды особых точек плоской кривой:

а) точка перегиба  $A$ , в которой касательные и нормали имеют противоположные направления;

б) точка возврата  $B$  (первого рода), в которой две ветви кривой расположены по разные стороны от касательных, направление которых совпадает, нормали имеют противоположные направления;

в) точка возврата второго рода  $C$ , или «клюв», в которой две ветви кривой расположены по одну сторону от касательных, направление которых совпадает, совпадает, также и направление нормалей;

г) точка излома  $D$ , кривая в этой точке имеет две касательные, направление которых меняется скачком;

д) узловая точка  $E$ , в которой кривая имеет две различные касательные.

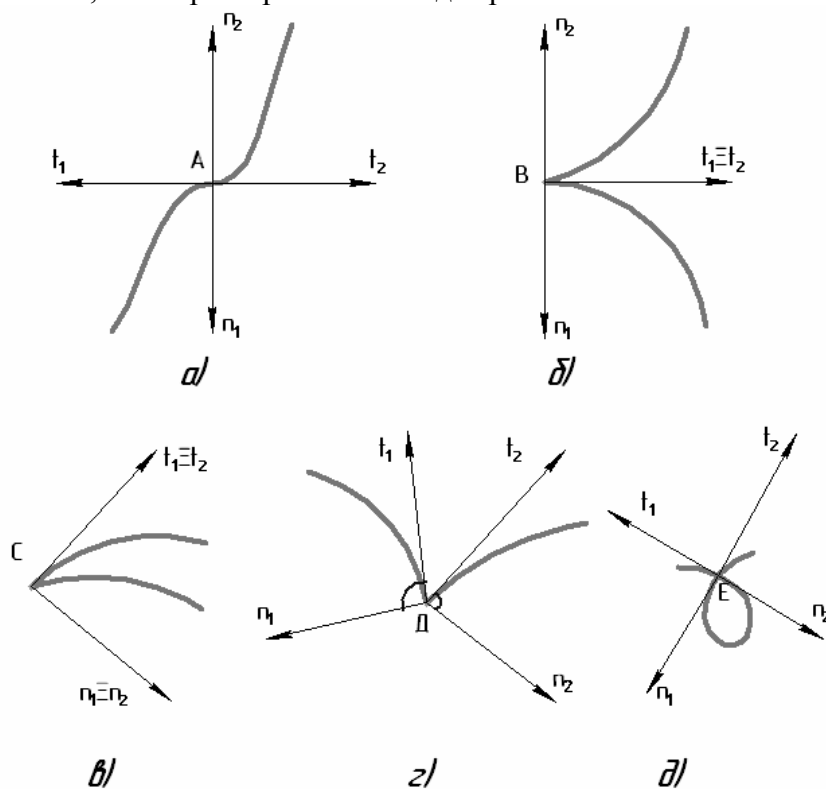


Рисунок 6.2.

### 6.3. Свойства параллельного проецирования плоских кривых линий

На рис. 6.3 показано проецирование плоской кривой  $ABC$  на произвольную плоскость проекций  $\Pi$ . При этом:

- порядок плоской алгебраической кривой при параллельном проецировании не изменяется (окружность проецируется в окружность или эллипс, эллипс проецируется в эллипс или окружность, парабола - в параболу, гипербола - в гиперболу);
- обыкновенная точка  $A$  проецируется в обыкновенную  $A_{\Pi}$ );

- особая точка (узловая)  $B$ , проецируется в особую  $B_{\Pi}$ ;
- секущая  $m$  кривой проецируется в секущую  $m_{\Pi}$ ;
- касательная  $t$  к кривой проецируется в касательную  $t_{\Pi}$ ;
- бесконечно удаленная точка кривой  $M_{\infty}$  проецируются в бесконечно удаленную  $M_{\infty\Pi}$ .

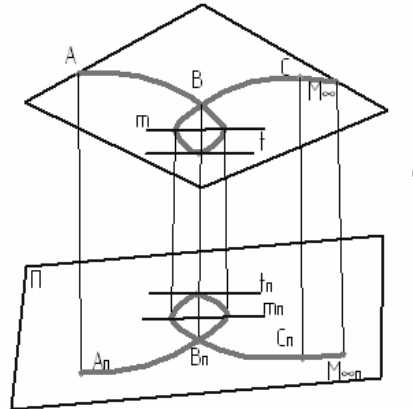


Рисунок 6.3.

#### 6.4. Определение по комплексному чертежу характера кривой

Для определения по комплексному чертежу характера кривой, плоская она или пространственная, в плоскости кривой проводят две пересекающиеся прямые  $AB$  и  $CD$  (Рис. 6.4). Если точки пересечения одноименных проекций этих прямых лежат на одной линии проекционной связи, то кривая – плоская, если нет, то кривая – пространственная.

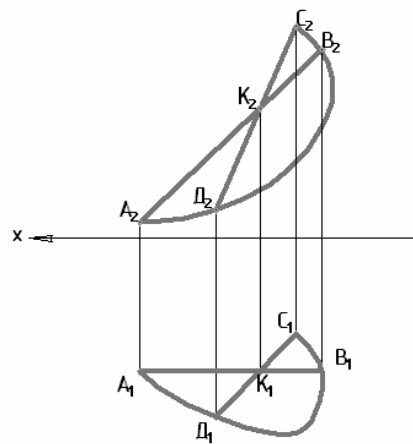


Рисунок 6.4.

#### 6.5. Определение длины кривой

Для определения длины кривой, нужно вписать в эту кривую ломанную линию, максимально передающей ее форму и определить длину каждого ее звена (Рис. 6.5). Используя способ плоскопараллельного перемещения, каждое звено вращали относительно оси перпендикулярной к  $\Pi_1$  до положения фронтального уровня. На комплексном чертеже, соответственно, горизонтальные проекции звеньев ломанной линии  $1_1 2_1 3_1 4_1$  были вытянуты вдоль прямой параллельной оси  $OX$ , а фронтальные проекции в

натуральную величину получены построением по линиям проекционной связи. Вытянув в прямую линию отдельные звенья ломанной линии в натуральную величину, получили наглядно длину кривой  $\ell$ .

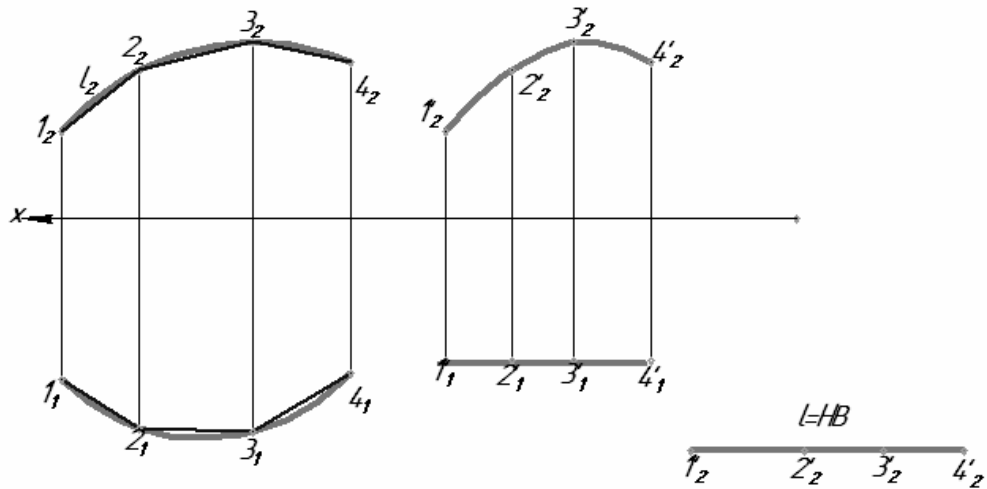


Рисунок 6.5.

### 6.6. Пространственные кривые линии

Из многообразия видов пространственных кривых линий рассмотрим только цилиндрические и конические, как имеющие наибольшее применение в технических формах (рабочие поверхности шнеков, кромки и канавки сверла, образование поверхности резьбы и т.д.).

Цилиндрическая винтовая линия (гелиса) представляет собой пространственную кривую, описываемую точкой, например  $A$ , совершающей равномерно-поступательное движение по образующей цилиндра, который в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси  $i$  (Рис. 6.6). Расстояние, измеренное вдоль образующей, на которое переместится точка за один оборот, называется шагом винтовой линии  $P_h$ .

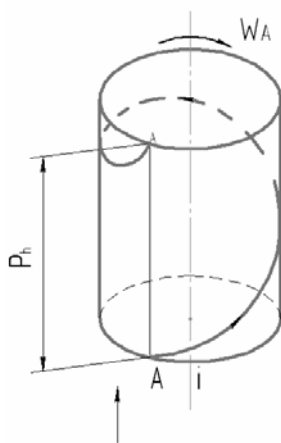


Рисунок 6.6.

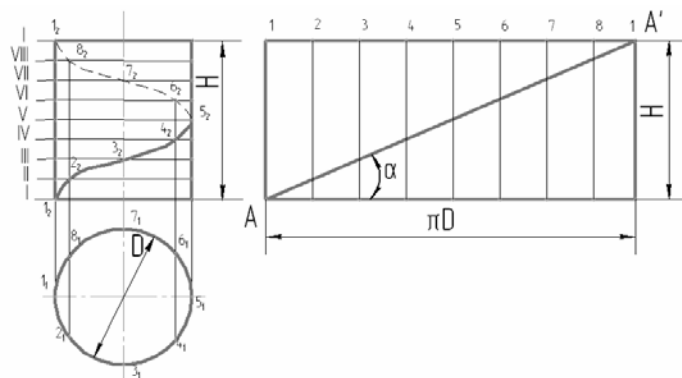


Рисунок 6.7.

Фронтальной проекцией винтовой линии является синусоида (Рис. 6.7), а горизонтальной – окружность. Видимая часть винтовой линии имеет подъем в правую сторону (подъем осуществляется против часовой стрелки) – это правая винтовая линия, если

наоборот, то левая. На развертке цилиндрической поверхности винтовая линия изображится в виде прямой  $AA'$ . Угол  $\alpha$  называется углом подъема винтовой линии.

По аналогии с цилиндрической винтовой линией нетрудно представить образование и конической винтовой линии (Рис. 6.8).

Фронтальной проекцией конической винтовой линии (Рис. 6.9) является синусоида, с уменьшающейся высотой волны (амплитудой), а горизонтальной – спираль Архимеда. На развертке конической поверхности винтовая линия изображится в виде кривой  $AA'$ .

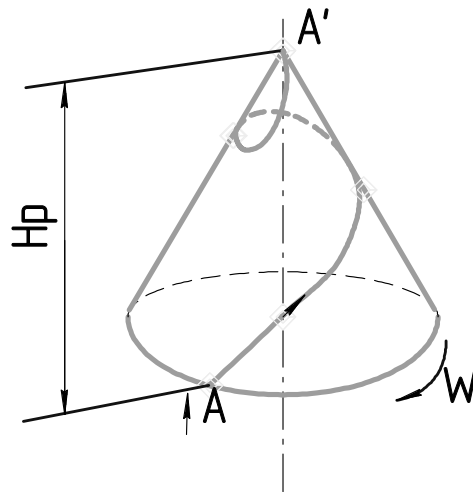


Рисунок 6.8.

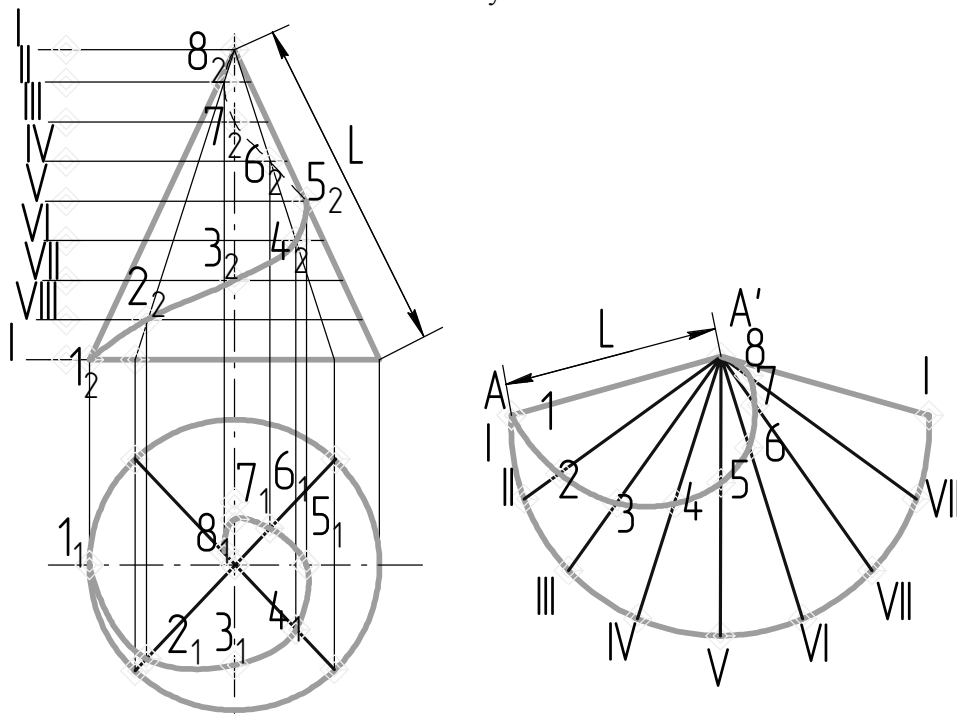


Рисунок 6.9.

## 6.7. Основные правила оформления чертежей по ЕСКД.

### 6.7.1 Форматы (ГОСТ 2.301–68)

Выполнение чертежа или другого документа начинается с определения необходимого формата (Табл. 6.1.) и его оформления. Формат следует выбирать так, чтобы чертеж был четким и ясным, изображения достаточно крупными, надписи и условные обозначения удобочитаемыми. Формат не должен быть излишне велик. Значительные пустоты неиспользованного рабочего поля чертежа не допускаются. Необходимо, чтобы рабочее поле составляло 70 – 80 % площади всего чертежа. За основной принят формат с размерами 1189 × 841, площадь которого приблизительно равна 1 м<sup>2</sup>, а, также меньшие форматы, полученные делением каждого предыдущего формата на две равные части линией, параллельной меньшей стороне.

Таблица 6.1. Обозначения и размеры основных форматов

Обозначение формата	A0	A1	A2	A3	A4
Размеры формата, мм	841 × 1189	594 × 841	420 × 594	297 × 420	210 × 297

### 6.7.2. Масштабы (ГОСТ 2.302–68)

Масштаб чертежа – это отношение линейных размеров изображения предмета на чертеже к его действительным размерам. В зависимости от сложности и величины изображаемых изделий масштабы выбирают из табл. 6.2.

Таблица 6.2. Масштабы

Масштабы уменьшения 1 : 2	1 : 2 1 : 20	1 : 2,5 1 : 25	1 : 4 1 : 40	1 : 5 1 : 50	1 : 75	1 : 10 1 : 100 и т.д.
Натуральная величина	1 : 1					
Масштабы увеличения	2 : 1 20 : 1	2,5 : 1	4 : 1 40 : 1	5 : 1 50 : 1		10 : 1 100 : 1

При выборе масштаба следует руководствоваться, прежде всего, удобством пользования чертежом. Если все проекции на чертеже выполнены с применением одного масштаба, то он записывается в основной надписи и обозначается по типу 1 : 1, 1 : 2 и т.д. Если какое-либо изображение на чертеже выполнено в масштабе, отличающемся от указанного в основной надписи, то над этим изображением указывают его условное обозначение и в скобках (без буквы «М») записывают значение масштаба.

### 6.7.3. Линии (ГОСТ 2.303–68)

Наименования, начертания, назначение и толщина часто употребляемых основных линий приведены в учебниках и справочниках по инженерной графике. Толщина сплошной основной линии  $S$  должна выбираться в пределах от 0,5 до 1,4 мм, в зависимости от формата чертежа и от размеров и сложности изображения. От правильного выбора видов линий, соблюдения постоянной толщины обводки, длины штрихов и промежутков между ними, от аккуратности проведения линий зависит качество выполняемого чертежа.

### 6.7.4. Шрифты чертежные (ГОСТ 2.304–81)

ГОСТ 2.304–81 устанавливает правила выполнения надписей, которые наносятся на чертежи и другие документы всех отраслей промышленности. Стандарт устанавливает следующие основные размеры шрифтов: 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40. Размеры шрифтов определяются высотой ( $h$ ) прописных (заглавных) букв в миллиметрах. Эта высота измеряется по направлению, перпендикулярному к основанию строки. Высота строчных букв выбирается на номер шрифта меньше. Цифры, встречающиеся в тексте должны иметь высоту прописных букв. Толщина линии шрифта обозначается буквой  $d$  и определяется в зависимости от типа и высоты шрифта. Для чертежей, также можно применять шрифт типа Б с наклоном около  $75^\circ$ .

### 6.7.5. Нанесение размеров (ЕСКД ГОСТ 2.307-68)

Для определения величины изображенного изделия и его элементов служат размерные числа, нанесенные на чертеже.

Требуемая точность изделия при изготовлении задается указанием на чертеже предельных отклонения размеров, а также предельных отклонений формы и расположения поверхностей.

Общее количество размеров на чертеже должно быть минимальным, но достаточным для изготовления и контроля изделия. Не допускается повторять размеры одного и того же элемента на разных изображениях. Линейные размеры и их предельные отклонения на чертежах и в спецификациях указывают в миллиметрах, без обозначения единицы измерения. Для размерных чисел применять простые дроби не допускается, за исключением размеров в дюймах.

Размеры, определяющие расположение сопрягаемых поверхностей, проставляют, как правило, от конструктивных баз с учетом возможностей выполнения и контроля этих размеров.

При расположении элементов предмета (отверстий, пазов, зубьев и т. п.) на одной оси или на одной окружности размеры, определяющие их взаимное расположение, наносят следующим способами:

- от общей базы (поверхности, оси) - рис. 6.10;
- заданием размеров нескольких групп элементов от нескольких общих баз - рис. 6.11.
- заданием размеров между смежными элементами (цепочкой) - рис.6.12.

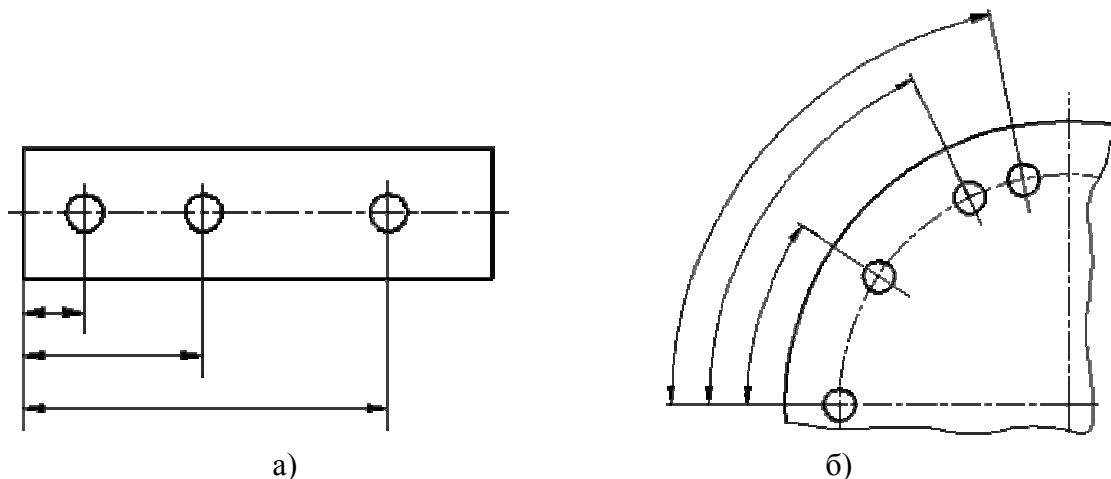


Рисунок 6.10. Простановка размеров определяющих взаимное расположение окружностей от общей базы

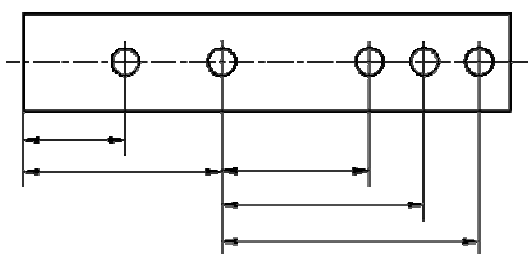


Рисунок 6.11. Задание размеров нескольких групп элементов от нескольких баз

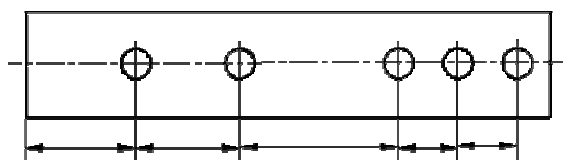


Рисунок 6.12. Задание размеров между смежными элементами (цепочкой)

Размеры на чертежах не допускается наносить в виде замкнутой цепи, за исключением случаев, когда один из размеров указан как справочный.

Для нанесения размеров используют выносные и размерные линии и размерные числа (Рис. 6.13).

Размерные и выносные линии следует выполнять сплошными тонкими линиями. Размерные линии ограничены стрелками. Величина стрелок выбирается в зависимости от толщины  $S$  линии видимого контура предмета (Рис. 6.14) и должна быть приблизительно одинакова для всех размерных линий чертежа. Выносные линии должны выходить за концы стрелок размерной линии на  $1 \dots 5$  мм.

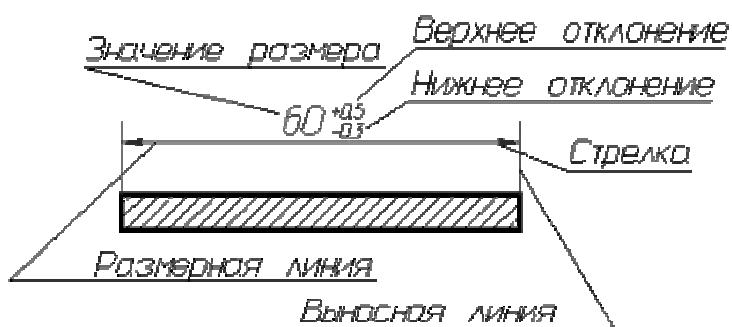


Рисунок 6.13. Составляющие размера

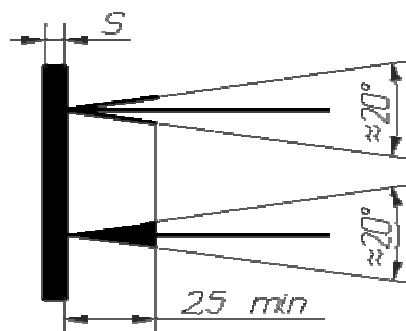


Рисунок 6.14. Стрелки размерной линии

При нанесении размера прямолинейного отрезка размерную линию проводят параллельно этому отрезку, а выносные линии - перпендикулярно размерам.

При нанесении размера угла размерную линию проводят в виде дуги с центром в его вершине, а выносные линии - радиально (Рис. 6.15).

При нанесении размеров нужно помнить, что на всех чертежах не зависимо от масштаба указываются действительные размеры изделия.

Размерные числа в пределах одного чертежа выполняют шрифтом одного размера. Размерные числа наносят над размерной линией возможно ближе к её середине. При нанесении нескольких параллельных или концентричных размерных линий на небольшом расстоянии друг от друга размерные числа над ними рекомендуется располагать в шахматном порядке.

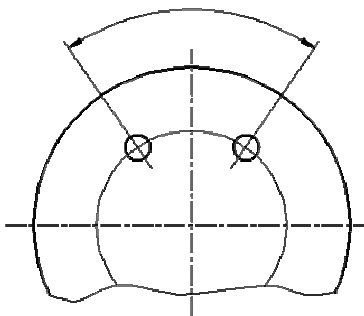


Рисунок 6.15. Пример нанесения размера угла

Размерные числа линейных размеров при различных наклонах размерных линий располагают, как показано на рисунке 6.16. Если необходимо нанести размер в заштрихованной зоне, соответствующее размерное число наносят на полке линии-выноски (Рис. 6.16).

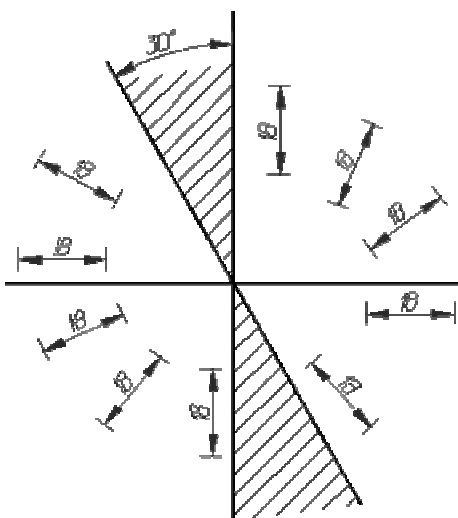


Рисунок 6.16. Расположение размерных чисел линейных размеров при различных наклонах размерных линий

Стрелки, ограничивающие размерные линии должны упираться острием в соответствующие линии контура, или выносные, или осевые линии.

Размерные линии предпочтительно наносить вне контура изображения.

Минимальное расстояние между параллельными размерными линиями должно быть 7 мм, а между размерной и линией контура - 10 мм и выбраны в зависимости от размеров изображения и насыщенности чертежа. Необходимо избегать пересечения размерных и выносных линий.

Не допускается использовать линии контура, осевые, центровые и выносные линии в качестве размерных линий.

Допускается проводить размерные линии непосредственно к линиям видимого контура, осевым, центровым и другим линиям.

Если длина размерной линии недостаточна для размещения на ней стрелок, то размерную линию продолжают выносить за выносные линии (или соответственно за контурные, осевые, центровые и т. д.) и стрелки наносят, как показано на рис. 6.17

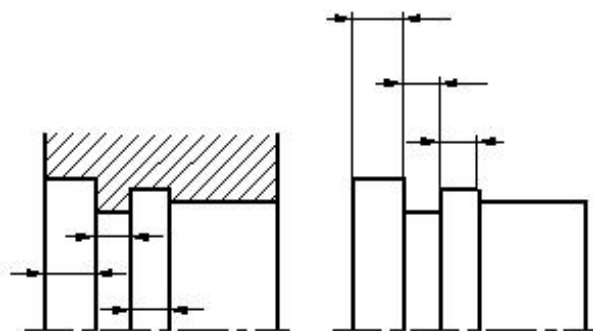


Рисунок 6.17. Пример нанесения размерных линий

При недостатке места для стрелок на размерных линиях, расположенных цепочкой, стрелки допускается заменить засечками, наносимыми под углом 45° к размерным линиям или четко наносимыми точками.

Если для написания размерного числа недостаточно места над размерной линией, то размеры наносят, как показано на рис. 6.18; если недостаточно места для нанесения стрелок, то их наносят, как показано на рис. 6.19.

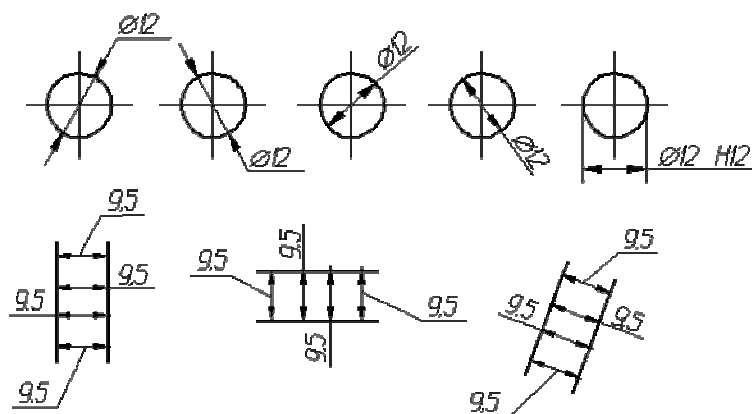


Рисунок 6.18. Примеры нанесения размерных чисел

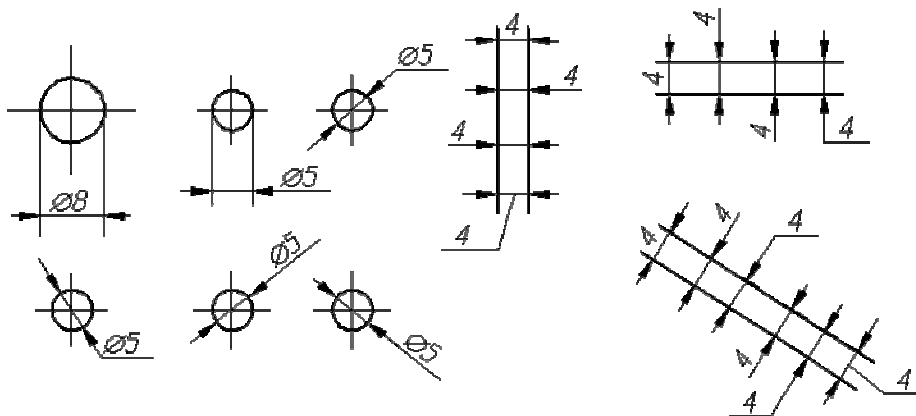


Рисунок 6.19. Примеры нанесения размерных чисел

Способ нанесения размерного числа при различных положениях размерных линий (стрелок) на чертеже определяется наибольшим удобством чтения.

Размерные числа, не допускается разделять или пересекать какими бы то ни было линиями чертежа. Не допускается разрывать линию контура для нанесения размерного числа и наносить размерные числа в местах пересечения размерных, осевых или центровых линий. В месте нанесения размерного числа осевые, центровые линии и линии штриховки прерывают.

### 6.8. Размеры радиусов

При нанесении размера радиуса перед размерным числом помещают прописную букву R.

Если при нанесении размера радиуса дуги окружности необходимо указать размер, определяющий положение ее центра, то последний изображают в виде пересечения центровых или выносных линий (Рис. 6.20).

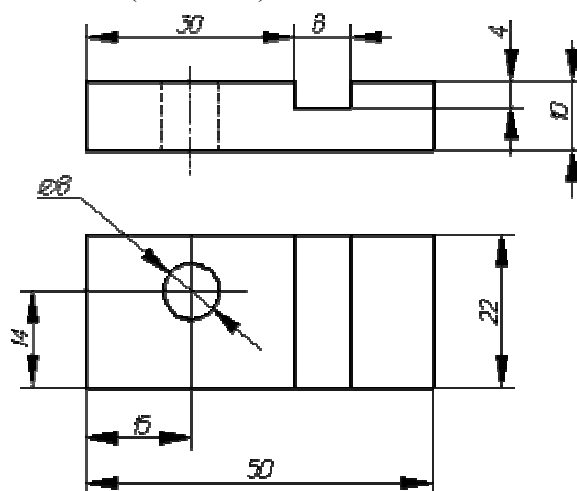


Рисунок 6.20. Нанесение размеров, относящихся к одному и тому же конструктивному элементу

При указании размера диаметра (во всех случаях) перед размерным числом наносят условное графическое обозначение. Размер знака равен высоте размерной цифры.

## 6.9. Уклон. Конусность

Перед размерным числом, характеризующим конусность, наносят условное графическое обозначение, острый угол которого должен быть направлен в сторону вершины конуса (рис. 6.21).

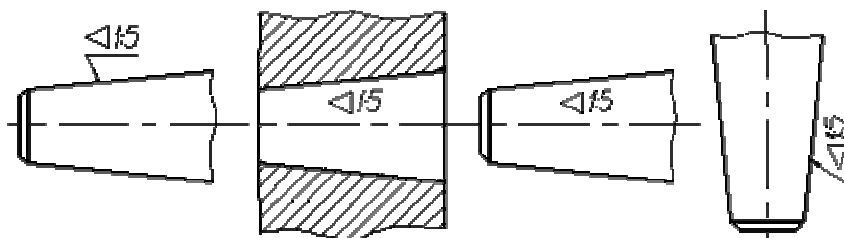


Рисунок 6.21. Пример нанесение размера конусности

Знак конуса и конусность в виде соотношения следует наносить над осевой линией или на полке линии-выноски.

Размерное число конусности на чертежах указывают в виде соотношения, например 1:5. В машиностроении применяется следующий ряд нормальных конусностей 1:5, 1:7, 1:10, 1:12, 1:15, 1:20, 1:30, 1:50, 1:100, 1:200... или в градусах 30°, 45°, 60°, 90°, 120°...

Конусность «К» - есть отношение разности диаметров двух поперечных сечений конуса к расстоянию между ними:

$$K = \frac{D-d}{l} = 2 \operatorname{tg} \alpha$$

Уклон поверхности следует указывать непосредственно у изображения поверхности уклона или на полке линии-выноски в виде соотношения (Рис. 6.22 а), в процентах (Рис. 6.22 б). Перед размерным числом, определяющим уклон, наносят знак «>», острый угол которого должен быть направлен в сторону уклона.

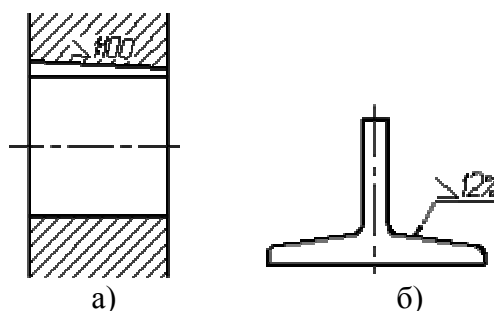


Рисунок 6.22. Пример нанесение размера уклона

Уклон «i» есть отношение катета BC к катету AC:  $i = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$

## 6.10. Сопряжения

**Сопряжением** называют плавный переход одной прямой линии или дуги окружности в другую прямую линию или дугу окружности. Центр сопрягающей дуги называется - **центром сопряжения**. Он определяется в пересечении двух вспомогательных линий параллельных заданным прямым или в пересечении двух дуг концентричных заданным дугам и отстоящих от заданных линий на расстоянии радиуса сопряжения.

Общая для этих линий точка называется **точкой сопряжения**. Точка сопряжения будет находиться: при сопряжении двух прямых на перпендикуляре, опущенном из центра сопряжения к самим прямым, при сопряжении двух дуг на прямых (или их продолжениях) соединяющих центры данных дуг.

Сопряжения двух прямых, являющихся сторонами прямого (Рис. 6.23 а), острого (Рис. 6.23 б) или тупого (Рис. 6.23 в) углов, посредством дуги радиуса  $R$ .

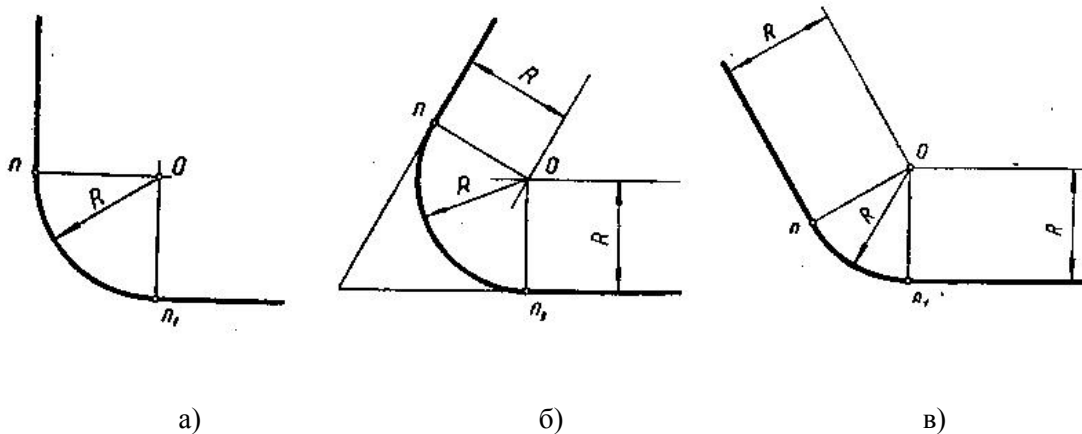


Рисунок 6.23. Сопряжение угла : а) прямого; б) острого; в) тупого

Во всех этих случаях поступают так:

1. Проводят две вспомогательные прямые линии, параллельные сторонам угла, на расстоянии от этих сторон, равном радиусу дуги  $R$ .

2. Находят точку  $O$  пересечения этих вспомогательных прямых. Точка  $O$  является центром дуги радиуса  $R$ , сопрягающей стороны угла т.е. центром сопряжения. Из этого центра  $O$  описывают дугу, плавно переходящую в прямые – стороны угла.

3. Дугу заканчивают в точках сопряжения  $n$  и  $n_1$ , которые являются основаниями перпендикуляров, опущенных из центра  $O$  на стороны угла.

Следует отметить, что сопряжения могут быть:

1. Внешние - центры всех сопрягаемых дуг находятся по разные стороны от точки сопряжения (Рис. 6.24, 6.26).

2. Внутренние – центры сопрягаемых дуг расположены по одну сторону от точек сопряжения (Рис. 6.25, 6.27).

3. Смешенные – центр одной из сопрягаемых дуг лежит внутри сопрягающей дуги, а центр другой сопрягаемой дуги – вне неё (Рис. 6.28)

**Сопряжение дуги окружности и прямой линии дугой заданного радиуса.** Внешнее сопряжение (Рис. 6.24). Центр  $O_1$  дуги сопряжения (центр сопряжения) находится на пересечении вспомогательной прямой  $b$ , отстоящей от заданной прямой на величину радиуса  $r$  и параллельной ей, и вспомогательной дуги радиуса  $R+r$  проведенной из цен-

тра  $O$ . Точки сопряжения  $C_3$  и  $C_2$  находятся соответственно в основании перпендикуляра  $O_1C_3$  и на пересечении прямой  $OO_1$  с основной окружностью.

Внутреннее сопряжение (Рис. 6.25). Центр  $O_1$  дуги сопряжения (центр сопряжения) находится на пересечении вспомогательной прямой, отстоящей от заданной прямой на величину радиуса  $r$ , а также параллельной ей и дуги радиуса  $R - r$  проведенной из центра  $O$ . Точки сопряжения – соответственно в основании перпендикуляра  $OC_1$  и на пересечении продолжении луча  $OO_1$  с основной окружностью.

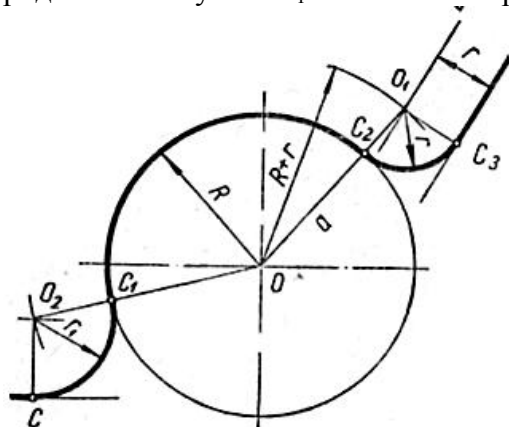


Рисунок 6.24. Внешнее сопряжение

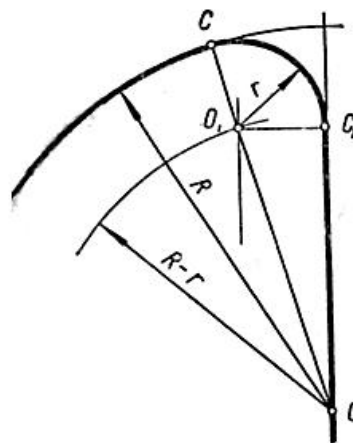


Рисунок 6.25. Внутреннее сопряжение

**Сопряжение двух окружностей дугой заданного радиуса.** Внешнее сопряжение (Рис. 6.26). Центр сопряжения  $O_2$  искомой дуги радиуса  $R$  находится на пересечении вспомогательных окружностей, описанных из центров  $O_1$  и  $O$  соответствующими радиусами  $R + R_2$  и  $R + R_1$ . Точки сопряжения  $S$  и  $S_1$  лежат на пересечении прямых  $OO_2$  и  $O_1O_2$  с основными окружностями соответственно.

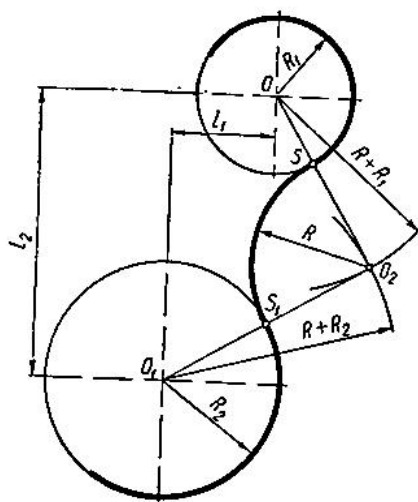


Рисунок 6.26. Внутреннее сопряжение

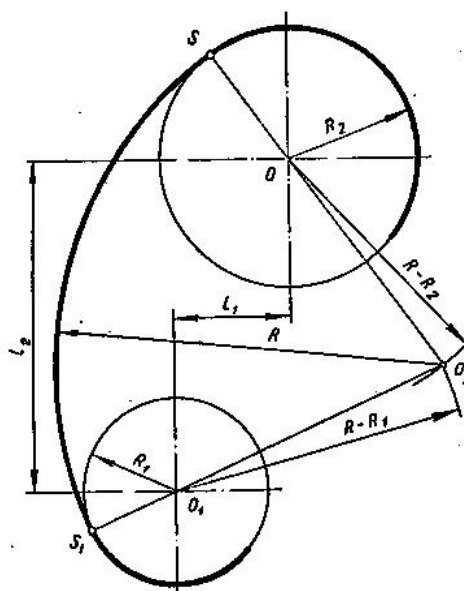


Рисунок 6.27. Внешнее сопряжение

Внутреннее сопряжение (Рис. 6.27). Центр сопряжения  $O_2$  искомой дуги радиуса  $R$  находится на пересечении вспомогательных окружностей, описанных из центров  $O$  и

$O_1$  соответствующими радиусами  $R - R_2$  и  $R - R_1$ . Точки сопряжения  $S$  и  $S_1$  лежат на пересечении продолжения прямых  $OO_2$  и  $O_1O_2$  с основными окружностями соответственно.

Смешанное касание (внешнее и внутреннее) (Рис. 6.28). Центр сопряжения  $O_2$  иско-мой дуги радиуса  $R$  находится на пересечении вспомогательных дуг, проведенных из центров  $O_1$  и  $O$  соответствующими радиусами  $R - R_2$  и  $R_1 + R$ . Точки сопряжения  $S_1$  и  $S$  лежат на пересечении прямой  $OO_2$  и продолжении прямой  $O_1O_2$  с основными окружностями соответственно.

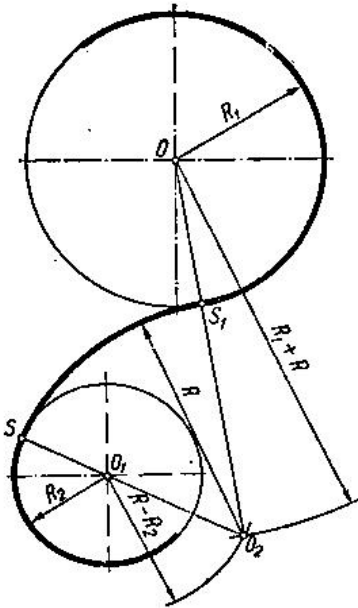


Рисунок 6.28. Смешанное касание

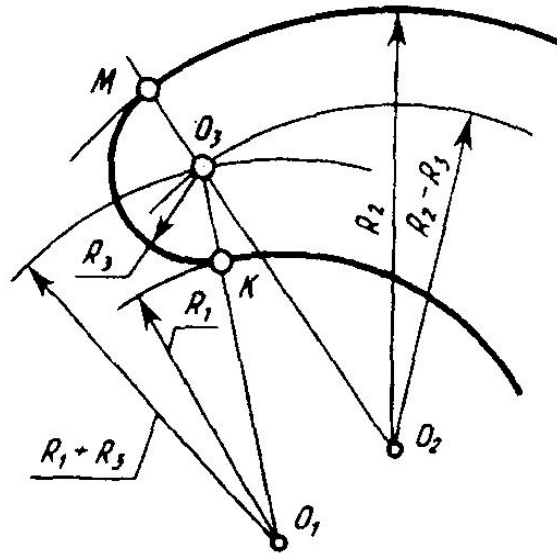


Рисунок 6.29. Сопряжение концентрических дуг

**Сопряжение двух неконцентрических дуг окружностей третьей дугой заданного радиуса** (Рис. 6.29). Центр  $O_3$  дуги  $R_3$  находится на пересечении двух вспомогательных дуг, построенных соответственно из центров  $O_1$  и  $O_2$  радиусами  $R_1 + R_3$  и  $R_2 - R_3$ . Точки сопряжения  $K$  и  $M$  лежат на лучах соединяющих центры сопрягаемых окружностей.

### Вопросы для самоконтроля

1. Плоские и пространственные кривые линии. Определение длины пространственной кривой линии по чертежу.
2. Цилиндрическая винтовая линия. Построить проекции винтовой линии с параметрами  $R = 40$  мм;  $H = 80$  мм.
3. Какие основные форматы установлены стандартом, их размеры.
4. Какие масштабы уменьшения и увеличения установлены стандартом.
5. Какие основные типы линий употребляются в черчении.
6. Какие размеры шрифта установлены ГОСТом?
7. Какой формат (его размеры и площадь, мм<sup>2</sup>) принимается за основной?
8. Что характеризуют числа при обозначении дополнительных форматов, например, А 4 х 4; А 3 х 3?.
9. Как выполняется сопряжение прямых, кривых линий. Приведите примеры.
10. Как определяются центр и точки сопряжений. Примеры.

11. Вычерчивание лекальных кривых. Разобрать пример на построение эллипса и параболы.
12. Выполнение и обозначение уклонов и конусности на чертежах. Примеры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная*

1. **Фазлулин, Э.М., Халдинов, В.А.** Инженерная графика / Э.М. Фазлулин, В.А. Халдинов. - М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 400 с.
2. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика. Часть I. Лабораторный практикум: уч. пособ. /А.Г. Герасимов. - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ» - Саратов: ИЦ «Наука», 2012. - 218 с.
3. **Чекмарев, А.А.** Инженерная графика / А.А. Чекмарев. - М. : Высшая школа, 2008. – 365 с.
4. **Герасимов, А.Г., Змеев, А.Я.** Курс начертательной геометрии. Учебное пособие с грифом УМО / А.Г. Герасимов, А.Я. Змеев. - Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2006. -188 с.

### *Дополнительная*

1. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Больнова, В.В.** Начертательная геометрия / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Больнова. - Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – 173 с.
2. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины / А.Г. Герасимов, - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова», 2004. - 20 с.
3. Стандарты ЕСКД.
4. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины / А.Г. Герасимов, - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова», 2004. - 20 с.
5. **Герасимов, А.Г., Больнова, В.В., Марьина, А.А.** Сопряжения. Лекальные кривые. Методические указания к выполнению модульной графической работы / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Больнова. – Саратов, СГАУ, 2008. – 30 с.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Фазлулин, Э.М., Халдинов, В.А.** Инженерная графика / Э.М. Фазлулин, В.А. Халдинов. - М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 400 с.
2. **Лагерь, А.И.** Инженерная графика /А.И. Лагерь. - М.: Высшая школа, 2002. – 270 с.
3. **Чекмарев, А.А.** Инженерная графика / А.А. Чекмарев. - М. : Высшая школа, 2002. – 365 с.
4. **Герасимов, А.Г., Змеев, А.Я.** Курс начертательной геометрии. Учебное пособие с грифом УМО / А.Г. Герасимов, А.Я. Змеев. - Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2006. -188 с.
5. Стандарты ЕСКД.
6. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Болынова, В.В.** Начертательная геометрия / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Болынова. - Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – 173 с.
7. **Герасимов, А.Г.** Методические указания и задания к выполнению модульной графической работы «Комплексное решение метрических и позиционных задач» / А.Г. Герасимов. - Саратов., ЦНТИ, 2006, – 24 с.
8. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А.** Сечение, развертка, изометрия поверхностей. Методические указания к выполнению модульной графической работы / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина. - Саратов, СГАУ, 2004. – 26 с.
9. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А.** Методические указания к выполнению модульной граф. работы "Пересечение поверхностей" / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина. - Саратов, СГАУ, 2004. -18 с.
10. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Болынова, В.В.** Ортогональные проекции / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Болынова. - Саратов, СГАУ, 2008 – 20 с.
11. **Болынова, В.В., Марьина, А.А.** Проекционные построения. Разрезы.Сечения. Прямоугольная изометрия / В.В. Болынова, А.А. Марьина. - Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – 32 с.
12. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Болынова, В.В.** Соединение сваркой. Методические указания к модульной графической работе / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Болынова. - Саратов, СГАУ, 2006. – 16 с.
13. **Герасимов, А.Г., Марьина, А.А., Болынова, В.В.** Инженерная графика. Деталирование сборочных единиц / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Болынова. – Саратов, ИЦ «Наука», 2010. – 92 с.
14. **Герасимов, А.Г.** Компьютерный практикум по инженерной графике / А.Г. Герасимов, - Саратов, СГАУ, 2008. – 64 с.
15. **Левицкий, В.С.** Машиностроительное черчение и автоматизация выполнения чертежей / В.С. Левицкий. - М., Высшая школа, 2001. – 249 с.
16. **Герасимов, А.Г.** Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины / А.Г. Герасимов, - ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ им. Н.И. Вавилова», 2004. - 20 с.
17. **Герасимов, А.Г., Болынова, В.В., Марьина, А.А.** Сопряжения. Лекальные кривые. Методические указания к выполнению модульной графической работы / А.Г. Герасимов, А.А. Марьина, В.В. Болынова. – Саратов, СГАУ, 2008. – 30 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>Лекция 1. Задание точки и прямой на комплексном чертеже Монжа.</b> .....	4
1.1. Метод проецирования .....	4
1.1.1. Центральные проекции и их основные свойства.....	4
1.1.2. Параллельные (цилиндрические) проекции и их основные свойства.....	4
1.2. Инвариантные свойства центрального проецирования.....	5
1.3 Комплексный чертеж точки.....	7
1.3.1. Проецирование точки на две плоскости проекций.....	7
1.3.2. Проецирование точки на три плоскости проекций.....	8
1.4. Комплексный чертёж точек, расположенных в четвертях пространства.....	9
1.5. Построение проекций точки по её прямоугольным координатам.....	11
1.6. Безосные комплексные чертежи.....	12
1.7. Комплексный чертеж прямой.....	12
1.7.1. Задание и положение прямой в пространстве.....	12
1.7.2. Следы прямой.....	13
1.7.3. Частные случаи расположения прямой.....	14
1.8. Взаимное положение двух прямых в пространстве.....	17
1.9. Метод конкурирующих точек.....	18
1.10. Проекции плоских углов.....	19
Вопросы для самоконтроля.....	19
Список литературы.....	20
<b>Лекция 2. Задание плоскости на комплексном чертеже Монжа.</b>	
<b>Метрические задачи. Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей</b> .....	21
2.1. Комплексный чертеж плоскости.....	21
2.1.1. Задание плоскости в пространстве и на комплексном чертеже.....	21
2.1.2. Плоскость общего положения.....	22
2.1.3. Принадлежность прямой и точки плоскости.....	22
2.1.4 Главные линии плоскости.....	23
2.1.5. Плоскости частного положения.....	24
2.2. Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей.....	28
2.2.1. Параллельность прямой и плоскости.....	28
2.2.2 Параллельность двух плоскостей.....	29
2.2.3. Перпендикулярность прямой и плоскости.....	29
2.2.4. Перпендикулярность двух плоскостей.....	30
2.2.6. Пересечение прямой и плоскости.....	33
2.3. Натуральная величина отрезка прямой.....	34
2.3.1. Определение натуральной величины отрезка прямой методом прямоугольного треугольника.....	34
2.3.2. Определение натуральной величины отрезка прямой методом вращения.....	35
Вопросы для самоконтроля.....	36
Список литературы.....	36
<b>Лекция 3. Задание поверхности на комплексном чертеже Монжа.</b>	
<b>Способы преобразования чертежа. Позиционные задачи</b> .....	37

3.1. Комплексный чертёж поверхности.....	37
3.1.1. Гранные поверхности.....	37
3.1.2. Поверхности вращения.....	38
3.2. Построение проекций точек принадлежащих поверхности.....	39
3.3. Преобразование комплексного чертежа.....	43
3.3.1. Способ замены плоскостей проекций.....	43
3.3.2. Способ вращения.....	46
3.3.3. Вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.....	47
3.4. Пересечение поверхностей плоскостью.....	48
Вопросы для самоконтроля.....	52
Список литературы.....	53
<b>Лекция 4. Построение разверток поверхностей. Аксонометрические проекции</b> .....	54
4.1. Развертки поверхностей.....	54
4.2. Аксонометрические проекции.....	56
Вопросы для самоконтроля.....	60
Список литературы.....	60
<b>Лекция 5. Пересечение поверхности</b> .....	61
5.1. Пересечение прямой линии с поверхностью.....	61
5.2. Взаимное пересечение поверхностей.....	62
5.2.1. Взаимное пересечение многогранников.....	64
5.2.2. Взаимное пересечение кривых поверхностей.....	65
5.2.3. Взаимное пересечение кривых и многогранных поверхностей.....	67
Вопросы для самоконтроля.....	69
Список литературы.....	69
<b>Лекция 6. Задание кривой на комплексном чертеже Монжа. Оформление чертежей. Элементы геометрии деталей. Изображения и обозначения элементов деталей</b> .....	70
6.1. Комплексный чертёж кривой.....	70
6.2. Основные понятия и определения плоских кривых.....	70
6.3. Свойства параллельного проецирования плоских кривых линий.....	71
6.4. Определение по комплексному чертежу характера кривой.....	72
6.5. Определение длины кривой.....	72
6.6. Пространственные кривые линии.....	73
6.7. Основные правила оформления чертежей по ЕСКД.....	75
6.7.1. Форматы (ГОСТ 2.301–68) .....	75
6.7.2. Масштабы (ГОСТ 2.302–68).....	75
6.7.3. Линии (ГОСТ 2.303–68) .....	76
6.7.4. Шрифты чертежные (ГОСТ 2.304–81).....	76
6.7.5. Нанесение размеров (ЕСКД ГОСТ 2.307-68).....	76
6.8. Размеры радиусов.....	80
6.9. Уклон. Конусность.....	81
6.10. Сопряжения.....	82
Вопросы для самоконтроля.....	84
Список литературы.....	85
<b>Библиографический список</b> .....	86
<b>Содержание</b> .....	87