Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет им. Н.И. Вавилова»

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

краткий курс лекций

для студентов 2 курса

Направление подготовки
38.03.06 Торговое дело

Профиль подготовки
Коммерция

Саратов 2016

УДК 004
ББК 32.97
Р94

Рецензенты:

Доцент кафедры «Электроника колебаний и волн», кандидат физико-математических наук, НИУ ВО «СГУ им. Н.Г. Чернышевского».
А.В. Толстиков
Заведующий кафедрой «Товароведение и экспертиза товаров», доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский ГАУ» им. Н.И. Вавилова
С. А. Богатырев

Р94 **Компьютерное моделирование в профессиональной деятельности**: краткий курс лекций для студентов направления подготовки 38.03.06 Торговое дело / Сост.: А.В. Розанов // ФГБОУ ВО «Саратовский ГАУ» им. Н.И. Вавилова. – Саратов, 2016. – 88 с.

Краткий курс лекций по дисциплине «Компьютерное моделирование в профессиональной деятельности» составлен в соответствие с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки **38.03.06 Торговое дело**. Краткий курс лекций содержит теоретический материал и практические примеры по основным понятиям, определениям и сферам применения компьютерного моделирования в перспективных направлениях коммерческой деятельности. Курс нацелен на формирование у студентов навыков анализа и оценки зависимостей в рамках экономических и коммерческих процессов с применением методов регрессионного и корреляционного анализа, метода наименьших квадратов, временных рядов, а также прогнозирования на основе регрессионных моделей.

УДК 004
ББК 32.97

Введение

Краткий курс лекций по дисциплине «Компьютерное моделирование в профессиональной деятельности» предназначен для студентов по направлению подготовки 38.03.06 Торговое дело. Курс лекций содержит теоретический материал и практические примеры по основным понятиям, определениям и сферам применения компьютерного моделирования в перспективных направлениях коммерческой деятельности. Курс нацелен на формирование у студентов навыков анализа и оценки зависимостей в рамках коммерческих и экономических процессов с применением методов дисперсионного и корреляционного анализа, временных рядов, а также прогнозирования на основе регрессионных моделей.

Лекция 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СИСТЕМ И СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

1.1. Системный подход. Основные понятия

Управлять современными сложными экономическими и коммерческими процессами уже невозможно на традиционных понятиях «здравого смысла». Интенсивные технологии, опирающиеся на сложные системы машин, средства защиты растений и пр., чрезвычайно расширяют межотраслевые взаимосвязи, обусловливают необходимость одновременного учета взаимодействия большого количества факторов, предвидения отдаленных последствий принимаемых решений. В этих условиях специалист любого уровня должен овладеть системным мышлением.

Новый тип научного мышления связан с ***системным восприятием*** окружающих нас объектов, явлений, процессов, мира в целом. Независимо от конкретной предметной области исследования, экспериментатор ставит своей конечной целью ***управление*** теми или иными системами. Чтобы управлять системой, необходимо изучить ***свойства*** ее поведения. До формирования общей теории систем и кибернетики как науки в исследованиях преобладал метод расчленения сложных явлений на части с целью выявления элементарных законов. Системный подход предполагает изучение сложного явления как целого без дробления на части, исследование, прежде всего, его общесистемных свойств. Исследование систем с позиций управления ими позволил обнаружить сходство и единство процессов управления, происходящих в системах самой различной природы (биологических, технических, экономических).

Суть единства заключается в подобии процессов передачи, хранения, переработки информации. Общими для всех естественнонаучных и социально-экономических наук стали такие фундаментальные понятия, как ***система, системные свойства, информация, обратная связь, модель, управление***. Стало возможным опираться на единые математико-логические методы. Существенно расширилась область применения формализованных методов научного анализа и синтеза на основе алгоритмизации, программирования, моделирования на ЭВМ.

Системный подход предполагает, прежде всего, рассмотрение любого явления в качестве целостной сложной динамической системы. С этих позиций цель эксперимента — изучение определенных аспектов поведения системы, выявление ее системных свойств. Эффективность экспериментального дела определяется глубиной понимания целостности и целенаправленности поведения системы, учетом сложных взаимосвязей в Иерархической структуре систем, возможностью реализации принципа оптимальности в управлении системой. Поэтому возникает объективная необходимость в органической увязке экспериментального дела с системным подходом, с более глубоким пониманием самого понятия системы.

1.2. Определение системы

Термин «система» общеупотребителен. Мы говорим: система машин, система севооборотов, система земледелия, система правил дорожного движения, солнечная система, система взглядов и т. д.

Каково научное определение системы?

Система — одно из фундаментальных понятий кибернетики. В первом приближении определение понятия системы связано с наличием некоторого ***множества, совокупности элементов***. Но не всякое множество элементов образует систему. Система — не механический набор, а совокупность ***взаимодействующих*** между собой элементов. Так, взаимосвязи и взаимодействия полей севооборота как системы проявляются в определенном их чередовании с учетом последействия предшественников, отдельные машины в системе также взаимосвязаны по своим основным параметрам. В то же время для определения системы недостаточно лишь наличия взаимосвязей и взаимодействия между элементами данного множества. Система обязательно предполагает ***целенаправленное взаимодействие***, т. е. некоторую **цель**, как результирующее свойство отношений между элементами исследуемого множества. Взаимодействие элементов системы, направленное на достижение некоторой цели, означает, что она способна реализовать определенную функцию. Для таких сложных систем характерны ***информационные процессы управления***. Общие закономерности, описывающие поведение таких систем, принципы организации их структур и внутренних взаимосвязей, особенности их поведения в изменяющейся среде являются предметом изучения теории систем.

Всеобщая взаимосвязь и обусловленность явлений — известное всем объективное свойство материального мира. Очевидно, системы, которые мы исследуем, являются частью этого мира. Как же их вычленять в качестве относительно обособленных систем?

Элементы, относящиеся именно к данной системе, обладают особым характером отношений — ***связностью***. Следует подчеркнуть относительность понятия «элемент системы». Данная конкретная система сама может рассматриваться как элемент другой системы более высокого порядка и, с другой стороны, может быть дезагрегирована на составные элементы, как ее подсистемы.

Система всегда рассматривается как некоторая обособленная часть более общего. Элементы системы взаимодействуют между собой несколько иначе, чем с другими системами — система обладает особой связностью, что обусловливает ее обособление. Все, что не относится к данной системе, рассматривается как ***внешняя среда*** по отношению к системе. Следовательно, с методической точки зрения определение системы означает вычленение ее из среды как некоторой обособившейся части, обладающей особыми свойствами отношений между элементами. В самом характере взаимодействия элементов системы имеет место целесообразность и целенаправленность. Система — не простой набор элементов (объектов, понятий, явлений и т. д.), а упорядоченная совокупность ***целенаправленно взаимодействующих элементов***.

Свойство связности проявляется в форме определенной упорядоченности отношений между элементами системы, определенной внутренней структуры. Именно это позволяет выделить систему как некоторую относительно обособленную совокупность. Все, что не относится к данной системе, является ***внешней средой*** по отношению к ней. Следовательно, определение системы предполагает нахождение соответствующего способа вычленения системы из окружающей среды как некоторой её обособленной части с особыми отношениями между ее элементами.

Итак, в первом приближении систему можно определить как относительно обособленную и упорядоченную совокупность обладающих особой связностью и целенаправленно взаимодействующих элементов, способных реализовать определенные функции.

Однако понятие системы неправомерно ограничивать только материальными объектами. Более глубокое раскрытие содержания системы как научной категории связано с распространением этого понятия и на абстрактные системы: система понятий, система экономико-математических методов, знаков системы и т. п. Более высокий уровень обобщения понятия системы связан с отношением исследователя к исследуемому явлению. В зависимости от цели исследования одно и то же явление может рассматриваться как элемент разных систем. Цель функционирования системы определяется отношением исследователя к решаемой задаче. Например, при изучении вопросов износа деталей, надежности механизмов трактор рассматривается как элемент технической системы, при анализе производительности труда тот же трактор является элементом системы организации производства и т. д. Следовательно, система в этом случае выступает как ***метод познания***, как ступень в процессе познания.

Представление об объектах и процессах как о системах — это способ научной абстракции и в зависимости от степени обобщения само определение системы может быть дано на разных уровнях:

1) элементарное определение системы как множества взаимосвязанных и взаимодействующих элементов;

2) определение системы как методического средства в подходе к решению каких-либо задач;

3) определение системы как философской категории познания.

1.3. Основные свойства системы

1. Важнейшим и определяющим свойством системы является ее ***целостность***. Свойство целостности обусловливается целесообразным взаимодействием элементов системы в соответствии с общей целью ее функционирования. Система как целое характеризуется множеством свойств, некоторые из которых можно вывести из анализа особенностей отдельных элементов. Но целое всегда обладает и качественно иными свойствами, не выводимыми из свойств отдельных элементов, образующих систему. Проявление качественно новых свойств, не присущих отдельным элементам системы, называют ***эмерджентностью***.

Эмерджентность имеет место во всех достаточно больших и сложных системах. Так, лес обладает свойствами, отличными от свойств отдельных деревьев, поведение толпы не является суммой поведений отдельных лиц и т.д. Эмерджентные свойства систем играют огромную роль в управлении ими. Так, сельскохозяйственное предприятие характеризуется системой показателей, отражающих ее своеобразие, свойства. Но исчерпывающая характеристика отрасли в целом не может быть получена только путем статистической сводки системы показателей всех предприятий отрасли. Отрасль как система более высокого порядка обладает новыми, не присущими предприятиям, свойствами, которые должны получить отражение в новой системе показателей. Эмерджентные свойства системы как единого целого обусловливаются проявлением особых эффектов взаимодействия, соответствующей структурой отношений между элементами. Так, эффективность совместного применения удобрений, как правило, выше, чем сумма эффектов от применения отдельных их видов. Эмерджентность является формой реализации некоторых свойств связности и организованности системы.

2. ***Связность***. Под свойством связности системы понимается особый характер взаимосвязей между ее элементами. Именно наличие связности является основой вычленения системы из окружающей среды как целого, обособленного. Свойство связности проявляется в форме определенной упорядоченности отношений между элементами, определенной внутренней структуры. При этом понятие структуры должно рассматриваться как вторичное — как отношение отношений между элементами системы. Эффективность функционирования систем существенно зависит от их структуры.

Со свойством связности тесно связано понятие разнообразия системы. Степень разнообразия зависит от числа элементов системы. Максимальное разнообразие определяется как $H = log_2 N$, где N — число элементов системы. Максимальное разнообразие соответствует тому случаю, когда поведение каждого из элементов не зависит от другого, т. е. элементы не связаны между собой, обладают максимальной степенью свободы. Число независимых характеристик называют числом степеней свободы. Из сущности определения системы следует, что в силу наличия взаимодействия и взаимосвязей между элементами в любой системе число степеней свободы ограничено. Система есть организованная, связная совокупность элементов и поэтому обладает ограниченным разнообразием. Целенаправленное функционирование системы возможно лишь благодаря ограничению ее разнообразия, что выражается наличием в системе закономерных взаимосвязей. Ограничение степеней свободы, разнообразия лежит в основе управления системой.

3. ***Сложность***. Каждой системе свойственна определенная степень сложности, определяемая ее величиной (числом элементов, образующих систему), степенью разветвленности ее внутренней структуры, характером функционирования системы (одноцелевое или многоцелевое функционирование). По числу элементов, внутренней структуре и выполняемым функциям тракторная бригада является менее сложной системой, чем отделение совхоза, в состав которого входит большое число хозяйственных единиц с различными функциями. Научно-технический прогресс в сельском хозяйстве сопровождается нарастанием сложности, которую необходимо преодолевать путем совершенствования структуры и повышением организованности структуры.

4. ***Организованность.*** Свойство организованности системы проявляется в изменении соотношения между нарастающей сложностью системы и совершенствованием ее структуры. Совершенствование структуры осуществляется путем организации новых форм взаимосвязей и взаимодействий между элементами системы.

Управление системой требует ее соответствующей организации. Благодаря совершенствованию структуры и организованности системы повышается ее управляемость. Таким образом, рассмотренные свойства — ***связность, структура, организованность*** — являются важнейшими характеристиками, определяющими содержание понятия управления и управляемости систем.

1.4. Система и внешняя среда. Входные и выходные величины

Согласно материалистической диалектике все явления материального мира развиваются в неразрывной связи. Определение системы означает ее распознавание, выделение из окружающей среды как целого, относительно самостоятельного и обособленного, способного реализовать некоторую целевую функцию с рассматриваемой исследователем точки зрения. Вычленение системы из окружающей среды равнозначно разбиению явления на две части: систему и внешнюю по отношению к ней среду. Каждое явление оказывает влияние на другие и само испытывает их ответное воздействие. Поскольку любая система существует в некоторой среде, между средой и системой осуществляются определенные взаимодействия. Так, молочный комплекс как система испытывает влияние таких факторов внешней среды, как состояние кормовой базы, наличие квалифицированной рабочей силы, уровень цен на комбикорма, на основные средства производства и т. д. В свою очередь, комплекс оказывает влияние на среду, потребляя рабочую силу, средства производства, природные ресурсы, поставляя готовую продукцию, изменяя окружающую природную среду и т. д.

Среда оказывает определенные воздействия на систему через соответствующие элементы системы, которые называются входами системы, а факторы внешней среды, осуществляющие эти воздействия, называются ***входными величинами.*** Так, для вегетирующего зеленого растения входными величинами (факторами внешней среды) являются солнечная радиация, температура окружающего воздуха, наличие углекислого газа и кислорода, почвенной влаги, растворенных в ней элементов минерального питания, различные механические воздействия (ветра, насекомых и т. п.). Эти входные величины оказывают воздействие на систему «растение» через соответствующие элементы системы, образующие вход: хлоропласты листьев (ассимилирующие углекислоту из воздуха и осуществляющие фотосинтез), корневые волоски (всасывающие почвенную влагу с растворенными в ней питательными веществами), покровные ткани всего растения (испытывающие механические, температурные, химические и другие воздействия среды).

Система, в свою очередь, оказывает влияние на среду через определенные элементы, образующие ***выход системы***. Факторы, определяющие воздействие системы на среду, называются ***выходными величинами***. Выходными величинами системы «растение» являются факторы, определяющие нарастание органической массы, плодоношение, выделение кислорода при фотосинтезе и углекислого газа в процессе дыхания и т. п.

Отдельные производственные процессы также можно рассматривать с точки зрения теории систем. Так, при уборке зерновых на входе уборочного агрегата входными величинами выступают урожай на корню, горючее, смазочные и вспомогательные материалы, потребляемые агрегатом, труд механизаторов; на выходе системы можно наблюдать ряд результативных величин: убранные гектары, намолоченное зерно и солома, экономические показатели работы агрегата.

Факторы, определяемые воздействием входных величин (как внешние воздействия), называют ***импульсами***, а выходные величины — ***реакциями*** системы на соответствующие импульсы. При исследовании системы входные и выходные величины (импульсы и реакции) целесообразно рассматривать как переменные, могущие принимать определенные значения. Таким образом, переменные выступают как количественные характеристики системы.

Переменные, значения которых в пределах данного исследования остаются неизменными, принято называть ***параметрами*** системы.

Факторы внешней среды представляют собой независимые переменные (обозначаются вектором X), а реакции системы — функции (вектор Y). Выражение входа и выхода системы через переменные позволяет математически формализовать процесс исследования поведения системы, рассматривая ее выходные величины как функции от входных: $Y = F(X)$. Например, урожайность есть некоторая функция от доз внесения удобрений, объем намолоченного за день зерна — функция урожайности, прирост органической массы зеленого растения — функция фотосинтетически активной радиации Солнца и т. п.

Система испытывает влияние бесконечного многообразия факторов внешней среды и соответственно может реагировать на них столь же многообразно. В реальной действительности рассмотрение всех без исключения воздействий и реакций невозможно, т. е. перебор всех возможных переменных системы неосуществим. Обычно задача исследования заключается в рассмотрении того или иного конкретного аспекта явления, характеризующегося ограниченным набором переменных. В этом смысле система представляет собой совокупность наиболее существенных переменных, освещающих данное явление с исследуемой точки зрения. Так, для экономиста совхоза наиболее существенными переменными конкретного работника служат квалификация, стаж работы, образование и т. д., а с точки зрения врача более существенны такие переменные, как возраст, вес, частота пульса, артериальное давление и др. Определение системы как комплекса существенных переменных служит основой математического моделирования ее поведения. Исследование системы предполагает определение ее элементов, выражение их в виде переменных, выбор наиболее существенных из них исходя из цели исследования, нахождение меняющихся значений переменных, выделение параметров.

Глубина исследования системы зависит от степени детализации переменных на входе и выходе. Степень детализации импульсов и реакций называют ***разрешающим уровнем исследования*** системы. Минимальным является тот разрешающий уровень, когда наблюдатель различает лишь один вход и один выход, хотя предполагается, что в данной системе имеют место разнообразные импульсы и реакции. Например, рассматривая зависимость урожайности от доз удобрений, экономист может ограничиться рассмотрением лишь одной входной величины — общей дозы минеральных удобрений в центнерах действующего вещества в расчете на 1 га посева, тем самым агрегируя все факторы минерального питания растений в одной переменной. Соответственно выходной величиной послужит показатель общего прироста урожая. При более глубоких биологических экспериментальных исследованиях на входе системы в качестве переменных могут быть рассмотрены конкретные формы усвояемого азота, фосфора, калия, микроэлементов и других факторов и, соответственно, на выходе могут различаться реакции растений в виде изменения листовой поверхности, форм ветвления, интенсивности процессов фотосинтеза, роста, развития и т. д.

1.5. Классификация систем. Виды систем

Элементы, образующие систему, могут быть самыми различными по своей природе. Если система состоит из множества материальных объектов, то данная совокупность элементов представляет собой физическую систему. Так, здание как физическая система состоит из множества конструктивных элементов; физическая система «трактор» представляет собой множество деталей, узлов, механизмов; множество планет и Солнце образуют Солнечную систему и т. п. По специфике составляющих элементов можно различать знаковые системы (система линейных уравнений, азбука Морзе и т. п.), системы понятий (система категорий политической экономии), системы взглядов (философские взгляды Чернышевского), системы правил (правила дорожного движения) и т. д.

Одни из названных систем являются ***естественными***, образовавшимися без участия человека, другие создаются людьми и представляют собой ***искусственные*** системы.

По характеру взаимодействия со средой различают открытые и замкнутые системы. В открытой системе происходит непрерывный обмен с внешней средой энергией, веществом, информацией. Открытая система находится во взаимодействии со средой. В замкнутой системе элементы взаимодействуют только между собой, но не связаны с внешней средой. Строго говоря, таких систем быть не может. Любые системы подвергаются воздействию среды и сами влияют на нее. Но иногда в методических целях полезно абстрагироваться от несущественных с позиций данной задачи взаимодействий системы со средой и рассматривать ее как замкнутую, например, только в информационном отношении. Так, электронная вычислительная машина, выполняющая в автоматическом режиме расчеты по заданной программе, представляет собой информационно замкнутую систему.

Системы различают по характеру причинной обусловленности событий в процессе взаимодействия элементов. Если в процессе взаимодействий последовательность событий в цепи «причина-следствие» однозначно предопределена, то такие системы называют ***детерминированными***. Связи в них носят жесткий, функциональный характер. Поведение таких систем в любой момент времени предсказуемо (например, солнечные затмения). С точки зрения процессов управления такие системы не представляют интереса. В то же время следует иметь в виду, что в реальной действительности строго детерминированные системы встречаются редко. Случайность существует всюду, и даже в самых простых детерминированных системах могут произойти случайные сбои. Так, нажатие на спусковой механизм заряженного пистолета сопровождается выстрелом не во всех 100% случаев. Понятие детерминированных систем в этом смысле относительно.

Чаще всего встречаются ***вероятностные*** системы. Вероятностными называются такие системы, последовательность событий в которых строго не детерминирована, носит вероятностный характер. Поведение таких систем точно предсказать невозможно, оно предсказуемо лишь с определенной вероятностью. Прогнозы о поведении таких систем строят в терминах теории вероятностей. Например: «с вероятностью 0,95 можно утверждать, что прирост урожайности в расчете на 1 ц минеральных удобрений в данном хозяйстве в условиях данного года составит 1,5 ± 0,4 ц ». В этой формулировке вероятность 0,95 характеризует степень достоверности вывода (в пяти случаях из ста поведение системы может выйти за указанные пределы 1,1—1,9 ц). Величина ±0,4 характеризует ошибку прогноза при заданной вероятности.

При рассмотрении свойств систем было отмечено, что системы различаются числом элементов, степенью разветвленности структуры, разнообразием, т. е. сложностью. По степени сложности системы принято делить на:

1) простые,
2) сложные,
3) очень сложные.

Простыми называют системы, состоящие из небольшого числа элементов, с простыми взаимосвязями, неразветвленной внутренней структурой и предназначенные для выполнения элементарных функций. Исследовать и описывать такие системы достаточно легко. Примерами простых систем являются: селекторная связь между двумя абонентами, чередование культур в севообороте и т. п.

Система называется ***сложной***, если число элементов в ней значительно, структура взаимосвязей и взаимодействий носит разветвленный характер, выполняемые функции разнообразны. В то же время, несмотря на сложность структуры и функций, система поддается описанию. Например, сельскохозяйственное предприятие можно считать сложной системой.

Очень сложными принято называть системы, сущность взаимосвязей в которых не вполне понятна, недостаточно изучена. Исчерпывающее описание структуры и поведения таких систем при данном уровне знаний не представляется возможным. Очень сложными системами являются общество, экономика, мозг, вселенная.

В кибернетике, где в качестве предмета исследования выступают процессы управления, нет необходимости рассматривать все возможные признаки классификации систем. Основная их классификация здесь строится путем комбинирования двух признаков: сложности и характера причинной обусловленности поведения систем.

Рассматривая приведенную классификацию систем, следует иметь в виду, что пока не существует количественной меры оценки сложности систем по числу элементов, степени связности, характеру структуры, организованности. Поэтому границы приведенной классификации достаточно условны. Жестких критериев дифференциации систем по сложности нет. Условность и относительность классификации состоит еще в том, что иногда термином «сложная система» обозначают не элемент классификации, а признак метода исследования системы при решении многоцелевых задач. Например, при обосновании выбора места для размещения откормочного комплекса приходится рассматривать одновременно несколько несравнимых аспектов: состояние кормовой базы, ресурсы рабочей силы, возможности поставки молодняка, технологию производства, размер капиталовложений, обеспечение водой, охрану окружающей среды и т. д. Проблема сложна в том смысле, что включает разнородные подзадачи, которые должны быть вычленены и изучены. Под **сложной системой** в данном случае понимается признак (или категория) метода разложения проблемы на составные части по специальным аспектам. Решение проблемы состоит в нахождении области пересечения рассматриваемых аспектов.

Другой подобный метод при исследовании систем основан на использовании понятия «большая система». Термин «большая система» не означает, что системы делятся на большие и малые. Под **большой** системой понимается методическое средство, используемое при анализе систем, которые невозможно охватить в целом, поскольку они необозримы либо в пространстве, либо во времени и поэтому исследуются по частям (не по аспектам, как в сложной системе).

Таким образом, понятия «большая система» и «сложная система» с методической точки зрения представляют собой средства, позволяющие осуществлять разные способы разложения системы на подсистемы: в «большой системе» на подсистемы расчленяется объект исследования, а в «сложной системе» на подсистемы дифференцируется задача исследования.

1.6. Структура систем. Иерархические структуры

При рассмотрении основных свойств систем отмечалось, что важнейшей особенностью всех систем является наличие некоторой структуры как упорядоченной формы отношений взаимодействия. Для сложных систем, рассматриваемых в кибернетике, характерны ***иерархические*** (многоуровневые) структуры. Принимая любой элемент системы в качестве отправного уровня, его можно рассматривать как подсистему вышестоящего уровня и, наоборот, элементы данного уровня можно рассматривать как систему, включающую подсистемы нижестоящего уровня. Уровни иерархии могут различаться по различным признакам: по организационному признаку (определение субординации при решении управленческих задач), по тому или иному аспекту деятельности системы (уровни связи по технологии производства, по со подчиненности отраслей), по способу расчленения сложной проблемы на иерархию более простых задач, по временным интервалам и т. д. В каждом из названных случаев образуются многоуровневые ***вертикальные или горизонтальные иерархические структуры.***

Иерархические структуры широко распространены и носят универсальный характер, что объясняется их существенными преимуществами по сравнению с другими типами структур (например, радиальными). Наличие многоуровневой иерархической структуры обеспечивает системе высокую надежность функционирования благодаря возможности создания элементной избыточности. Экономичность системы обеспечивается благодаря рациональной дифференциации энергетических, материальных и информационных потоков по уровням. При иерархической структуре создается возможность целесообразного сочетания локальных критериев с общим критерием при нахождении оптимального режима функционирования системы. Иерархические структуры широко используются в системах управления производством. Эффективность функционирования системы в значительной мере зависит от ее структуры, от формы связей в иерархии. Поэтому одной из важных задач кибернетики является изучение закономерностей в иерархических, структурах.

1.7. Состояние и движение системы

При рассмотрении отношений системы со средой отмечалось, что входные и выходные величины выступают как переменные, могущие принимать те или иные значения. Найти конкретные значения наиболее существенных переменных системы— значит охарактеризовать состояние системы.

С течением времени значения переменных изменяются (элементы системы из одного состояния переходят в другое). В некоторых системах переход из одного состояния в другое осуществляется мгновенными скачками, а затем система относительно долго остается в данном состоянии. Такие системы называют ***статическими***. В реальной действительности система не может оставаться в статическом состоянии бесконечно долго. Все системы изменяются во времени. Когда говорят о статических системах, имеется в виду, что существенные переменные системы остаются неизмененными в течение времени данного исследования.

Наибольший интерес с точки зрения управления представляют закономерности поведения сложных динамических систем. Системы называются ***динамическими***, если переход из одного состояния в другое совершается не мгновенными скачками, а в течение некоторого времени, т. е. процесс перехода можно наблюдать и описать.

Последовательное изменение состояний системы называется ***движением***. Движение системы в широком смысле слова включает в себя любое ее изменение во времени.

Движение системы описывается значениями ее переменных в последовательные моменты времени. Если состояние системы в момент времени t_0 описывается вектором X_0, а состояние в момент t_1 вектором X_1 то, следовательно, система совершила переход из состояния

$$t_0(X_0) \text{ в } t_1(X_1).$$

Переход системы из одного состояния в другое обычно совершается по некоторому закону, строгое описание действия которого называют ***оператором***. Переменная, подвергающаяся влиянию оператора, называется ***операндом***, а новое значение переменной — ***образом***. Так, под воздействием труда и средств производства исходное сырье или природный материал превращаются в потребительскую продукцию (здесь операнд — сырье, образ — продукция, оператор — технологический процесс, совершающийся с определенной закономерностью).

Для описания состояния системы и ее движения используются различные способы: словесный, табличный, матричный, графический. Иногда удается найти обобщенное математическое выражение, описывающее закономерность движения системы в аналитической форме. При описании состояния и движения хозяйственных систем чаще всего используются графический, табличный и матричный методы.

Переменные, характеризующие состояние системы, можно представить в виде координат в пространстве. Если исследуются только две переменные системы, то ее состояние будет охарактеризовано точкой в двумерном пространстве (на плоскости). Обычно число переменных значительно больше и поэтому состояние системы характеризуется точкой в многомерном векторном пространстве. Такое пространство, в котором каждому состоянию системы соответствует определенная и причем единственная точка, называется ***пространством состояний системы***.

В общем случае число возможных состояний системы определяется числом элементов, их разнообразием и связями между ними. Допустим, система представлена отделением совхоза и характеризуется тремя переменными: y_1 — урожайность зерновых культур, ц/га; y_2 — удой на корову за год, кг; y_3— количество работников.

Состояние системы будет изображаться точкой в трехмерном пространстве. В реальных условиях каждая переменная изменяется в ограниченном интервале.

Область пространства, в которой может находиться точка, изображающая состояние системы, называется ***областью допустимых состояний***. Эта область включает в себя всевозможные траектории поведения системы.

В процессе движения системы один и тот же оператор обычно оказывает воздействие на множество операндов. Например, известкование почвы оказывает влияние не только на кислотность почвенного раствора, но и на почвенную микрофлору, механический состав почвы, поглотительную способность и т.д.; дополнительные капитальные вложения воздействуют на обеспеченность основными фондами, вооруженность труда, занятость рабочей силы, сезонность производства, производительность труда, рентабельность производства и другие переменные предприятия, являющиеся в используемой здесь терминологии операндами. Новые значения перечисленных переменных, получаемых под влиянием возрастающих капиталовложений, образуют множество образов. В качестве оператора следует рассматривать сложную и не всегда достаточно изученную закономерность изменения множества переменных под влиянием дополнительных капитальных вложений.

Переход множества операндов во множество образов под воздействием некоторого оператора называется ***преобразованием***. Преобразования могут быть однозначными, взаимно однозначными, однозначными односторонне и неоднозначными. Если в преобразовании каждому оператору соответствует только один образ, то такое преобразование называется однозначным.

Исследование поведения систем в динамике позволяет раскрыть суть оператора преобразования — найти закономерность движения системы.

Некоторые преобразования формально действительны и в обратном направлении: зная закон преобразования, например, в рядах динамики, можно вычислить не только последующие, но и предыдущие уровни урожайности. Следовательно, зная оператор, по образу можно восстановить значение операнда. Такие преобразования называются взаимно однозначными. Некоторые преобразования могут быть лишь односторонне однозначными, когда один и тот же образ может получиться как результат перехода различных операндов. Например, повышение урожайности с 1 га до 45 ц может быть результатом повышенных доз удобрений, полива, применения нового сорта и т. д.

Движение систем обычно описывается табличным, графическим, матричным или другими способами. Для изображения движения технических систем чаще используются кинематические графики.

В реальных условиях преобразования, как правило, неоднозначны. Так, дополнительное внесение одной и той же дозы удобрений в различные годы и на разных типах почв дает разную прибавку, а иногда может сопровождаться и снижением урожайности (например, при засухе). Даже при хорошо выровненных условиях эксперимента прирост урожайности бывает различным. Повышение уровня механизации может привести к снижению себестоимости продукции, но не всегда. Механизация может просто облегчить труд работников. Описанные случаи являются примерами неоднозначных преобразований.

При исследовании взаимно неоднозначных преобразований важно не только определить возможное разнообразие появляющихся образов, но и установить вероятности перехода данного операнда в тот или иной образ (например, вероятность получения определенного числа всходов от 100 семян, вероятность изготовления детали с браком и т. д.). В сельском хозяйстве после благоприятного по погодным условиям года может снова следовать благоприятный год, но не исключено, что он окажется неблагоприятным или средним. Вероятности таких переходов можно оценить на основе статистической обработки рядов динамики урожайности сельскохозяйственных культур.

1.8. Методы изучения состояния и движения системы

Движение системы, как видно из изложенного выше, есть процесс преобразования входных величин в выходные. Иначе говоря, импульсы на входе системы ($X_1, X_2, ..., X_n$) соответственно преобразуются в реакции на выходе системы (Y_1, $У_2$, ..., Y_m). При этом реализуется некоторая закономерность $Y = = F(X)$. Сама система в данном случае представляет собой некоторый преобразователь входных величин в выходные. С этой точки зрения производство есть преобразователь ресурсов (природных ресурсов, основных и оборотных средств, ресурсов труда и т. п.) в производимую продукцию.

Рассматривая любую систему как некоторый преобразователь, ее поведение можно изучить путем анализа входных и выходных величин. При этом о поведении системы делается вывод только на основе исследования импульсов и реакций, а внутренняя структура системы и протекающие в ней процессы не рассматриваются. Такой способ изучения поведения системы получил название ***метода черного ящика***. Метод используется чаще всего в тех случаях, когда внутренняя структура исследуемой системы либо очень сложна и имеет многоуровневую иерархию, а эмерджентные свойства системы в целом невозможно вывести из свойств отдельных подсистем, либо внутренние свойства системы вовсе не известны. Тогда исследователю остаются доступными лишь вход и выход системы. Оказывая на вход системы разнообразные воздействия, исследователь изучает ее реакции на выходе. Таким методом система может быть изучена в достаточной степени, что делает возможным предсказание ее поведения при любых импульсах на входе, хотя внутренняя структура системы при этом специально не исследуется.

В то же время следует иметь в виду, что одинаковым поведением могут обладать системы, имеющие совершенно разную структуру. Это открывает возможность изучения поведения менее доступных систем на более доступных и простых по структуре. На этом принципе основан другой широко используемый метод кибернетики — ***моделирование***.

Процесс моделирования заключается в том, что реальное явление и его аналог (физическая, математическая или иная по своей природе модель явления) рассматриваются как два черных ящика, между входами и выходами которых существует однозначное соответствие. Это значит, что вход второго черного

ящика может быть однозначно преобразован во вход первого и соответственно выход второго может однозначно преобразовываться в выход первого. Это явление получило название ***изоморфизма***. Изоморфными относительно друг друга являются записи чисел на перфокартах, перфолентах, магнитных лентах, поскольку они тождественны по содержанию. Метод моделирования по принципу черного ящика основан на явлении изоморфизма, т. е. на взаимно однозначном соответствии поведения некоторых объектов независимо от их внутренней структуры.

Следует, однако, иметь в виду, что реальное явление всегда богаче, разностороннее, чем модель, на которой исследуются лишь наиболее существенные переменные реальной системы. Так, на географической карте отображаются не все детали местности, а лишь наиболее важные; в экономико-математической модели оптимизации производства учитываются только основные условия хозяйства и т. д. По модели невозможно во всех деталях создать заново моделируемый объект, хотя в самом существенном их поведения тождественны. Каждому состоянию реальной системы однозначно соответствует определенное состояние модели. Но в модели отображаются лишь существенные переменные, а в реальной системе переменных значительно больше. Поэтому состояние реальной системы не может определяться данным состоянием модели. Следовательно, в моделировании мы имеем случай соответствия, однозначного лишь в одну сторону.

Отношения подобия, однозначного лишь в одну сторону, называются ***гомоморфизмом***. В предельном случае гомоморфизм становится изоморфизмом. В кибернетике используются гомоморфные модели. Так, экономико-математическая модель является гомоморфной моделью какого-либо экономического процесса.

Для сложных кибернетических систем связь между входными и выходными величинами, как правило, опосредована состоянием внутренних параметров. Поэтому при изучении поведения системы в целях совершенствования управления приходится рассматривать состояние внутренних ее параметров. Рассмотрим, например, работу уборочного агрегата. Выходными величинами Y в данном случае будут количество убранных гектаров y_1, масса намолоченного зерна y_2, высота среза стеблей y_3, количество зерен, остающихся невымолоченными в колосьях, y_4, количество неподобранных стеблей y_5 и т. д.

Входными величинами являются воздействия комбайнера на те или иные механизмы комбайна (изменение положения штурвала x_1, рычага коробки передачи x_2, регулятора подачи воздуха x_3, изменение расстояния между барабаном и декой x_4 и т. д.). На агрегат оказывает влияние также ряд внешних воздействий среды (неровности рельефа x_5, густота и высота стеблей x_6, направление и сила ветра x_7, влажность растений x_8 и др.).

Входные величины X вначале преобразуются в координаты самой системы (агрегата). Обозначим эти координаты через Z. Координатами системы являются, например, число оборотов двигателя z_1 высота режущего аппарата z_2, расстояние между мотовилом и режущим аппаратом z_3, скорость z_4, ширина зазора между барабаном и декой z_5 и т. д.

Координаты системы Z, в свою очередь, преобразуются в выходные величины Y как конечные результаты процесса. Преобразование входных величин X в координаты системы Z можно выразить соотношением $Z = F(X)$. Так, число оборотов двигателя z_1 определяется положением заслонки подачи воздуха x_3, т. е. $z = f(x_3)$; высота режущего аппарата z_2 зависит от положения штурвала x_1 т. е. $z_2 = f\{x_1)$ и т. д.

Преобразование координат системы Z в выходные величины Y выражается как $Y = F(Z)$. Так, вымолот зерна из колосьев y_4 определяется такими координатами системы, как z_1 и z_5, т. е. $y_4 = f\{z_1, z_5)$; количество убранных гектаров y_1 зависит от скорости z_4, т. е. $y_1 = f(z_4)$, высота среза (высота стерни) y_3 определяется высотой режущего аппарата z_2, т. е. $y_3 = f\{z_2)$ и т. д.

Следует также иметь в виду, что выходные величины зависят не только от контролируемых воздействий на систему, но и от случайных воздействий среды (так называемые возмущающие воздействия). Высота среза, например, зависит не только от положения штурвала, определяющего высоту режущего аппарата от горизонтальной поверхности, но и от неровностей рельефа, вибрации аппарата и т. п. Возмущающие воздействия бывают не только внешними. Они могут возникать и в самой системе (например, затупление ножей режущего аппарата и т. п.).

Таким образом, если весь процесс, описанный здесь, рассматривать как черный ящик, то он как бы расчленяется на две части, соотношения между входами и выходами которых последовательно связаны: (1) $Z=F(X)$ и (2) $Y=F(Z)$, т.е. выход первой части служит входом для второй части.

1.9. Типы поведения динамических систем. Понятие устойчивости

В процессе движения динамическая система может находиться в трех различных состояниях: равновесном, переходном и периодическом.

Состояние динамической системы называется равновесным, если не одна из существенных ее переменных не изменяется во времени. Различают статическое и динамическое равновесие. Статическое равновесие — это равновесие покоя. Более важным с точки зрения процессов управления является равновесие систем в динамике.

Равновесное состояние системы в динамике означает, что преобразования ее переменных являются тождественными, т. е. не порождают новых образов. Так, на одном и том же уровне поддерживаются страховые запасы семян, кормов, горючего. ***Равновесный режим*** поведения динамической системы тесно связан с понятием устойчивости системы, о чем будет сказано позже.

Переходным называется такой тип поведения системы, когда она находится в состоянии перехода из некоторого начального состояния в какое-либо установившееся состояние. Переходный режим является основным типом поведения для динамических развивающихся систем, особенно часто встречающихся в экономике.

Если система через равные интервалы времени возвращается в одни и те же состояния, то данный режим поведения называется ***периодическим.*** Так, известно, что на величину отклонений урожайности от линии регрессии, отражающей основную тенденцию роста, существенное влияние оказывают повторяющиеся с 11-летней периодичностью изменения солнечной активности.

Понятие устойчивости. Важнейшей характеристикой поведения динамических систем является их устойчивость. Под ***устойчивостью*** понимается постоянство состояния системы или постоянство последовательности некоторых ее состояний во времени в процессе ее преобразований. Понятие устойчивости в живых организмах связывают с понятием гомеостазиса. ***Гомеостазисом*** называется способность живых организмов обеспечивать оптимальный режим внутренней среды путем поддержания постоянства существенных переменных (температуры, состава клеточной жидкости и т. д.). Обеспечение постоянства существенных параметров системы достигается за счет процессов управления (саморегулирования) в живых организмах, благодаря чему устраняются последствия возмущающих случайных влияний среды на отдельные подсистемы организма.

Принцип гомеостазиса в настоящее время часто используется при конструировании различных технических систем, которые называют гомеостатическими. Первое такое техническое устройство было создано английским нейрофизиологом У. Эшби, которое было названо гомеостатом Эшби. Использование принципа гомеостазиса позволило создать разнообразные технические системы (например, для определения оптимальных значений параметров автопилотов в современных самолетах, систем автоматического регулирования методом случайного поиска и т. п.). Понятие устойчивости в строгом смысле относится не к самой системе, а к какому-нибудь свойству ее поведения, причем поведения системы в целом, а не какой-либо ее части. При агрегировании ряда систем с неустойчивым поведением новая система может оказаться устойчивой. На устойчивость системы может оказать влияние также способ агрегирования. В то же время при объединении нескольких устойчивых систем не обязательно получится система с устойчивым поведением.

Понятие устойчивости динамических систем обычно связывается с тем, что отклонения некоторых параметров системы от заданных не превышают допустимых значений. Например, отклонения урожайности от линии тренда, как правило, находятся в определенных границах, что свидетельствует об устойчивости основной тенденции ряда, обусловливаемой факторами интенсификации. Устойчивость основной тенденции является важным условием, обеспечивающим надежное прогнозирование поведения системы.

Следует заметить, что система, устойчивая по некоторому свойству поведения, по другому признаку может быть и неустойчивой. Так, устойчивость основной тенденции в ряду динамики урожайности вовсе не означает, что окажется устойчивой также тенденция изменения себестоимости продукции. Определенный интерес представляет исследование устойчивости поведения систем по отношению к возмущениям различной природы (например, устойчивость тенденции роста урожайности в условиях орошения, при различных сочетаниях погодных условий по зонам страны и т. п.).

1.10. Кибернетические системы

Кибернетика как наука рассматривает не любые системы, а только определенный класс систем, называемых ***управляемыми системами***.

Основной особенностью управляемых систем является их способность изменять свое поведение под влиянием управляющих воздействий на вход системы. Свойство управляемости присуще объектам самой различной природы (технические, биологические, экономические и т. д.). Конкретные особенности этих систем, зависящие от их природы, не являются предметом рассмотрения кибернетики. Здесь представляют интерес общие закономерности изменения поведения управляемых систем под влиянием различных управляющих воздействий. С этой точки зрения объектом исследования является абстрактная кибернетическая система. При рассмотрении кибернетической системы мы не принимаем во внимание материальные и энергетические взаимосвязи системы со средой. Нас здесь, прежде всего, интересуют информационные потоки, а материальные и энергетические потоки выступают лишь как носители информации. Такой подход позволяет вычленить и исследовать специфические процессы управления, протекающие в системе. В связи с этим такая абстрактная кибернетическая система получила название ***системы управления***.

Система управления имеет особую структуру. В простейшем случае она состоит из двух подсистем: а) управляющей и б) управляемой. Эти подсистемы соединены каналами связи. С точки зрения управления системой, важно рассмотреть, прежде всего, информационные процессы. Управляющая подсистема в зависимости от цели управления оказывает определенные воздействия на вход управляемого объекта. Линия, по которой осуществляется это воздействие, называется ***каналом прямой связи***, а сама форма связи — ***прямой***.

Под влиянием управляющих воздействий исходное состояние управляемой подсистемы преобразовывается в новое состояние. Цель управляющих воздействий — привести систему в желаемое состояние, а если речь идет об управлении поведением системы,— то добиться соответствия движения управляемого объекта по некоторой траектории в соответствии с его функциями. В этом смысле управление есть процесс, ведущий к достижению некоторой цели, т. е. заставляющий систему выполнять определенную программу.

Управляемый объект всегда испытывает влияние ряда неконтролируемых управляющей подсистемой случайных воздействий среды. В связи с этим выходные величины могут отклоняться от требуемых значений. Если управляющая подсистема не будет знать об этих отклонениях, то фактическое поведение системы очень скоро отклонится от заданной траектории настолько, что достижение цели управления станет невозможным. Поэтому очень важно, чтобы информация о выходных величинах (или о величине их отклонений от заданных) систематически поступала в управляющую подсистему, т. е. необходим канал связи, соединяющий выход системы с входом. Эта линия называется ***линией обратной связи***, а информационное воздействие выхода на вход системы называется ***обратной связью***. Благодаря наличию обратной связи создается возможность постоянно сопоставлять выходные величины с требуемыми их значениями и в зависимости от величины отклонений принимать новые управленческие решения. При этом, естественно, управляющая подсистема должна не только учитывать отклонения выходных величин от заданных, но и принимать во внимание изменения условий внешней среды и оценивать возможное влияние этих изменений на поведение управляемого объекта.

Обратная связь в системах управления носит универсальный характер. Она широко распространена в технике, природе, обществе. Отдельные элементы подсистем могут иметь местные обратные связи. Обратная связь может осуществляться либо непосредственно между выходом и входом, либо через опосредствующие элементы системы. Между выходом и входом системы как единого целого образуется контур ***внешней обратной связи***.

Если целью управляющих воздействий является устранение последствий влияния возмущающих факторов внешней среды на систему, то управляющие воздействия обычно носят компенсирующий характер. Суммирование этих воздействий с величинами отклонений от нормы должно дать нулевое значение, т. е. ликвидировать отклонение. Такая обратная связь называется ***отрицательной***. ***Отрицательная обратная связь стабилизирует поведение системы.*** Для систем с отрицательной обратной связью характерно состояние равновесия (статического или динамического). Обратная связь называется ***положительной***, если она способствует увеличению отклонения выходной величины от начального уровня. Например, материальное стимулирование способствует дальнейшему росту производительности труда, увеличению объема продукции.

Управляющая и управляемая подсистемы имеют существенные различия. ***Управляющая подсистема*** есть не что иное, как преобразователь информации о состоянии управляемой подсистемы и внешней среды в управляющие воздействия. В экономических системах эти управляющие воздействия носят характер директивных указаний, распоряжений, предписаний, которые призваны ограничивать множество возможных состояний управляемой подсистемы, т. е. осуществлять целенаправленный выбор некоторого типа поведения системы в целом.

В управляемом объекте происходит преобразование ресурсов в продукты потребления (если речь идет о производственных объектах). Информация о ходе этих процессов снимается на выходе и снова поступает в управляющую подсистему. Управляющая подсистема снова вырабатывает сигналы воздействия, которые корректируют поведение управляемого объекта. Большое значение имеет качество управления. Величина, позволяющая оценить качество управления, называется ***критерием эффективности управления***.

Например, если целью управления является стабилизация системы, то чем меньше отклоняются выходные величины от заданных, тем выше качество управления. Если управляющие воздействия обеспечивают наибольшее значение критерия эффективности, то управление является ***оптимальным***.

Отличительная особенность производственных систем управления заключается в том, что это так называемые ***человеко-машинные системы***. Человек определяет цель функционирования системы, является одновременно и носителем, и пользователем информации, выработка управленческих решений также осуществляется человеком. Человеко-машинные системы управления имеют специфические черты, изучение которых требует привлечения методов ряда смежных дисциплин: биологической кибернетики, технической кибернетики, экономической кибернетики. Важной задачей исследования человеко-машинных систем является выяснение вопросов оптимального распределения функций между человеком и машиной с учетом их возможностей и особенностей.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют системой, элементом системы, структурой системы.
2. В чём состоит системный подход при изучении сложных систем различной природы
3. Основные свойства систем и их взаимосвязь
4. Что принято называть эмерджентностью системы, и каковы её особенности
5. Взаимодействие системы с внешней средой. Основные понятия
6. Принципы классификации естественных и искусственных систем
7. Дифференциация больших и сложных систем
8. Статические и динамические системы
9. Методы исследования состояния и движения систем
10. Понятие устойчивости системы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Черняков М.В., Петрушин А.С**. Основы информационных технологий. Учебник для ВУЗов. / М.В. Черняков, А.С. Петрушин. - М.: ИКЦ Академкнига, 2007. - 407 с.
2. «Информатика». Базовый курс. / Под ред. Симоновича П.А. - СПб.: Изд-во «Питер», 2008, 640 с.
3. **Кашина И.А.** Информационно-правовые системы в экономической деятельности / И.А. Кашина [и др.] - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
4. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В.** Математическое моделирование в бизнесе. Практикум. / В.Е. Лихтеншейн., Г.В. Росс. - М.:ФиС, 2008. -509 с.
5. Информатизация бизнеса: концепции, технологии, системы / А.М. Карминский [и др.] 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 624с.
6. Математическое моделирование управления: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Г.А. Титаренко. - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2007.

7. Информационные системы и технологии в экономике и управлении: Учебник / Под ред. проф. В.В. Трофимова. – М.: Высшее образование, 2009. – 480с.

Дополнительная

1. **Розанов А.В., Федоров В.К.** Программирование персональных компьютеров. Электронный учебник на CD-ROM. / А.В. Розанов, В.К. Федоров. - Саратов, 2006
2. **Макаров В.Ф.** Аутентификация электронного документооборота и защита информации с использованием методов ассиметричного преобразования данных. / В.Ф. Макаров [и др.] - М.: РГТЭУ, 2006. - 58 с.
3. **Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П.** Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. - М.: ИНФРА – М, 2003.
4. **Зайцев М. Г.** Методы оптимизации управления для менеджеров: компьютерно–ориентированный подход. Учебное пособие. / М. Г. Зайцев. - М.: Дело, 2002.

Лекция 2

ДЕСКРИПТИВНЫЕ И ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСИЕ МОДЕЛИ

В настоящее время трудно представить себе сферу человеческой деятельности, где нельзя было бы использовать ЭВМ. ЭВМ применяются буквально во всех сферах нашей жизни: в науке, производстве, культуре, медицине, искусстве и т.д. Уже сейчас микроЭВМ становятся такими же постоянными спутниками нашей жизни, как наручные часы! Особенно велика роль ЭВМ в инженерной практике, когда инженеру при разработке новых изделий или технологий приходится выполнять большой объем вычислений, оценок, расчетов и других операций по обработке данных.

Применение ЭВМ, и особенно персональных (ПЭВМ), должно в недалеком будущем заметно сократить сроки разработок, снизить стоимость проектирования, экономических расчетов и научно-технических исследований. Именно этой цели служит курс "Математическое моделирование", задачей которого является ознакомление магистрантов с применением математических методов и персональных ЭВМ к решению прикладных задач, часто возникающих в инженерной практике.

2.1. Этапы математического моделирования при решении задач

1 этап: Постановка задачи в реальных объектах. Формулировка или осознание проблемы. Составление технического задания.

В инженерной практике это, например, необходимость определения выдержит ли мост данную нагрузку или трубопровод требуемое давление пара.

2 этап: Построение математической модели исследуемого объекта или процесса. На этом этапе выделяют наиболее важные черты и свойства объекта (неважные отбрасывают) и эти свойства записывают в виде математических уравнений.

3 этап: Выбор алгоритма решения и разработка прогграммы для ЭВМ.

4 этап: Выполнение программы на ЭВМ с входными данными, отвечающими реальному процессу.

5 этап: Проверка соответствия полученных результатов требованиям задания или проверка точности решения.

Обычно на практике с первой попытки получить удовлетворительное решение не удается. Поэтому этапы построения модели, разработки алгоритма и программы, выполнения программы и оценки точности результатов повторяют до тех пор, пока не появится уверенность, что найдено наилучшее решение.

6 этап: Составление технической документации, описывающей проектируемое изделие или технологический процесс.

2.2. Основные понятия моделирования

Модель (от латинского modulus - мера, образец, способ) - это устройство, воспроизводящее (имитирующее) строение или действие другого ("моделируемого") устройства в научных, производственных (при испытаниях) или спортивных (авиамоделизм) целях.

В широком смысле ***модель*** - это любой мысленный или условный образ (изображение, описание, схема, чертеж, график, план, картина и т.д.) некоторого объекта, процесса или явления ("оригинала" данной модели), который используется в качестве "заместителя" этого объекта.

Оригинал (от латинского originalus - первоначальный) - подлинник, подлинное произведение (в отличии от копии).

Моделирование - исследование явлений или процессов путем построения и изучения их моделей. Моделирование состоит в выявлении основных свойств исследуемого процесса, построении его модели, изучении свойств (поведения) модели и прогнозировании поведения исследуемого процесса на основе изучения модели.

Критерием правильности моделирования является практика.

2.3. Общая классификация моделей

Вообще говоря, моделей очень много: знаковые, лингвистические, социологические и т.д. Но для инженерной практики наиболее существенны физические и математические модели.

Физической называют модель, воспроизводящую изучаемый оригинал с полным или частичным сохранением его физической природы и геометрического подобия.

Физические модели бывают натурные (1:1) и масштабные (уменьшенные или увеличенные).

Создание физических моделей - дело очень дорогостоящее, особенно для моделирования больших систем и сложных процессов. Однако физическое моделирование - это единственный способ проникновения в неизвестное в тех случаях, когда человеческие знания пока не могут быть теоретически обобщены. В инженерной практике все более эффективным и дешевым становится математическое моделирование.

Математическая модель - приближенное описание явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. (Академик А.Н.Тихонов. Математическая энциклопедия).

Математическое моделирование - это мощный инструмент познания мира, а также прогнозирования и управления. Но чтобы описать какое-либо явление природы, надо выявить его наиболее существенные свойства, закономерности и связи, отбросив менее существенные. Это упрощает и огрубляет модель, но позволяет сделать ее доступной для исследования, т.к. в реальном явлении участвует множество процессов, учесть которые просто невозможно, а в конкретной задаче и не нужно. Например, при изучении колебаний обычного маятника (груза на нити) совершенно не важно белая нить или черная, а груз красный или синий - важны длина нити и масса груза.

После того, как наиболее важные факторы выявлены, следующий шаг состоит в описании этих факторов и их взаимосвязи на языке математики (при помощи математической символики) обычно в форме уравнений и неравенств. Это не случайно, т.к. все законы природы сформулированы на языке уравнений: алгебраических, дифференциальных, разностных и т.п.

Когда явление природы, науки или техники переведено на язык математики, оно может быть исследовано хорошо разработанными математическими методами.

Эксперимент на математической модели, как правило, проще, быстрее, дешевле, экономичнее и безопаснее, чем на физической модели, а тем более на оригинале. Более того, хорошая математическая модель может быть использована для изучения многих других оригиналов с различной физической природой, поскольку "математика - это искусство называть разные вещи одними именами " (Анри Пуанкаре).

2.4. Классификация математических моделей

Все разнообразие математических моделей может быть разделено на два больших класса:

1. Детерминированные модели.
2. Вероятностные (эмпирические, статистические, иногда стохастические) модели.

Детерминированными называют математические модели, в которых все определено (от латинского слова determino "определяю"), т.е. установлено однозначное функциональное соответствие между входными и выходными параметрами. Главное здесь состоит в том, что для моделирования процессов в таких системах используются обычные уравнения: алгебраические, дифференциальные, в частных производных и т.д. Уравнения могут быть очень сложными, нелинейными, трансцендентными, но они не должны содержать никаких случайных переменных.

Вероятностными называют модели, в которых соответствие входных и выходных переменных носит случайный характер и описывается распределением вероятностей. Для их исследования приходится пользоваться методами теории вероятностей и математической статистики. Это прежде всего обработка экспериментальных данных. К вероятностным моделям примыкают так называемые имитационные математические модели (имитация - подражание, подделка).

Имитационное моделирование - это воспроизведение в модели процессов, происходящих в оригинале, путем искусственной имитации случайных величин, от которых зависят эти процессы. Случайные величины в модели генерируются с помощью датчиков или генераторов (псевдо)случайных чисел, реализованных в виде специальных программ на ЭВМ. Выходные характеристики модели оцениваются методом ***Монте-Карло***. Эти модели применяют в тех случаях, когда нельзя составить и решить алгебраически или численно уравнения, описывающие функционирование исследуемой системы. Яркий пример имитационного моделирования действительности - это компьютерные игры!

2.5. Оптимизационные математические модели

Рассмотренные выше математические модели, имея множество отличий, обладают одной общей чертой. Они предназначены для математического описания различных природных явлений, технологических процессов и социальных феноменов. Это так называемые описательные или, говоря научно, дескриптивные математические модели (от англ. Description-описание, изображение). Они служат для познания окружающего мира и овладения его законами.

Не менее, а часто более, важную роль и в жизни, и в инженерной практике играет еще один класс математических моделей, предназначенных не только для описания, но и для управления природными и технологическими процессами в интересах человека и общества. Эти модели называются ***оптимизационными*** *(от латинского optimum-наилучшее).*

Оптимизация вообще - это поиск некоторого оптимума - совокупности наиболее благоприятных условий (от латинского optimum - наилучшее). В математическом моделировании - это поиск наилучшего варианта решения задачи с точки зрения достижения намеченной цели. Например, создание нового изделия с более высоким качеством и меньшей себестоимостью.

Оптимизационными называются такие математические модели, которые позволяют найти наилучшее решение поставленной задачи или наилучший способ достижения цели при заданных условиях и ресурсах.

(Ресурсы-запасы, средства, возможности, источники средств, доходов)

Типичная оптимизационная задача - это создание новых изделий или технологий с более высоким качеством продукта и более низкой себестоимостью.

С простейшими задачами оптимизации мы уже встречались в курсе высшей математики при изучении методов поиска экстремумов функций (от лат. Extremum - крайнее).

В классическом математическом анализе задача отыскания экстремальных (т.е. либо максимальных, либо минимальных) значений некоторой функции решается на основе изучения поведения ее производных.

Классические методы поиска экстремумов с использованием производных применимы далеко не всегда. Существует очень много функций, которые не имеют производных как раз в точках максимумов или минимумов. Часто целевая функция не может быть задана ни формулой, ни уравнением, а её значения получают в результате измерений, либо численного счёта. В таких случаях применяют специальные математические методы оптимизации.

2.6. Современные методы компьютерного моделирования

В настоящее время широко применяется понятие "компьютерное моделирование", которое значительно шире традиционного понятия "моделирование на ЭВМ" и нуждается в уточнении, учитывающем сегодняшние реалии.

Начнем с термина ***«компьютерная модель»***. В настоящее время под компьютерной моделью чаще всего понимают:

- условный образ объекта или некоторой системы объектов (или процессов), описанный с помощью взаимосвязанных компьютерных таблиц, блок-схем, диаграмм, графиков, рисунков, анимационных фрагментов, гипертекстов и т. д. и отображающий структуру и взаимосвязи между элементами объекта. Компьютерные модели такого вида мы будем называть ***структурно-функциональными***;
- отдельную программу, совокупность программ, программный комплекс, позволяющий с помощью последовательности вычислений и графического отображения их результатов, воспроизводить (имитировать) процессы функционирования объекта, системы объектов при условии воздействия на объект различных, как правило случайных, факторов. Такие модели мы будем далее называть ***имитационными моделями***.

Компьютерное моделирование - метод решения задачи анализа или синтеза сложной системы на основе использования ее компьютерной модели. Суть компьютерного моделирования заключена в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные выводы, получаемые по результатам анализа, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства сложной системы: ее структуру, динамику развития, устойчивость, целостность и др. Количественные выводы в основном носят характер прогноза некоторых будущих или объяснения прошлых значений переменных, характеризирующих систему.

Предметом компьютерного моделирования могут быть: экономическая деятельность фирмы или банка, промышленное предприятие, информационно-вычислительная сеть, технологический процесс, любой реальный объект или процесс, например процесс инфляции, и вообще - любая Сложная Система. Цели компьютерного моделирования могут быть различными, однако наиболее часто моделирование является, как уже отмечалось ранее, центральной процедурой системного анализа, причем под системным анализом мы далее понимаем совокупность методологических средств, используемых для подготовки и принятия решений экономического, организационного, социального или технического характера.

Компьютерная модель сложной системы должна по возможности отображать все основные факторы и взаимосвязи, характеризующие реальные ситуации, критерии и ограничения. Модель должна быть достаточно универсальной, чтобы по возможности описывать близкие по назначению объекты, и в то же время достаточно простой, чтобы позволить выполнить необходимые исследования с разумными затратами.

Все это говорит о том, что моделирование систем, рассматриваемое в целом, представляет собой скорее искусство, чем сформировавшуюся науку с самостоятельным набором средств отображения явлений и процессов реального мира. Поэтому исключительно сложной являются попытки классификации задач компьютерного моделирования или создания достаточно универсальных инструментальных средств компьютерного моделирования произвольных объектов. Однако если преднамеренно сузить класс рассматриваемых объектов, ограничившись, например, задачами компьютерного моделирования при системном анализе объектов экономико-организационного управления, то можно говорить о структурно-функциональном моделировании.

2.7. Структурно-функциональное моделирование

Истоки структурно-функционального моделирования следует искать в теоретических основах электрических цепей, электронике и радиотехнике, где впервые широко стали использоваться различные блок-схемы. Дальнейшее развитие структурно-функциональное моделирование получило в теории автоматического управления (ТАУ), где был развит аппарат, включающий в себя не только правила составления и преобразования, но и достаточно общую методологию анализа и синтеза структурных схем, основанную на том, что каждой математической операции над сигналами поставлен в соответствие определенный элементарный структурный блок. Хотя динамические структурно-функциональные схемы теории автоматического управления обладают широчайшими возможностями для анализа непрерывных, линейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, они плохо подходят для описания процессов в экономико-организационных системах, где связи между отдельными блоками имеют гораздо более широкое толкование и редко могут быть сведены к некоторой функции времени (сигналу). Не очень удобны они и для описания алгоритмов и программ, для которых понятие "элементарный блок" существенно отличается от принятого в ТАУ. В частности, для составления блок-схем алгоритмов и программ, потребность в которых появилась в начале 60-х, понадобились символы, соответствующие основным операциям машинной обработки данных, их накоплению, сортировке и передаче. В результате довольно длительной разработки и последующей эволюции были созданы и нашли широкое применение государственные стандарты на составление и использование блок-схем алгоритмов и программ, вошедшие впоследствии в перечень обязательных документов Единой системы программной документации (ЕСПД). Использование стандартов на блок-схемы алгоритмов и программ весьма жестко контролировалось как Госфондом алгоритмов и программ (ГАП), так и другими "компетентными органами", причем описание любой программы и любого алгоритма должно было содержать блок-схему, даже и при отсутствии особой нужды.

Дальнейшее развитие блок-схем, связано с развитием автоматизированных систем управления производством (АСУП), появившихся в начале 70-х, в которых, в отличие от алгоритмов и программ, блок-схемы стали выполнять несколько иные функции. Основным назначением графических символов при проектировании АСУП явилось именно моделирование объекта автоматизации и процессов функционирования самой АСУП. Символика проектов АСУП включала в себя прежде всего функциональные блоки, предназначенные для отображения основных функций сбора, накопления, передачи и обработки данных. Наряду с ними в состав условных графических обозначений были включены и символы, позволяющие описывать разнообразные структуры объектов управления. На использование символов при проектировании АСУП разработаны специальные ГОСТы, регламентирующие состав, размеры и вид символов, а так же правила их использования. В целом, совокупность символов для АСУП и правил их использования образуют простейший язык структурно-функционального моделирования, применяющийся при системном анализе и проектировании автоматизированных экономико-организационных систем. Можно только сожалеть о том, что развитие подобных языков моделирования в СССР приостановилось в начале 80-х, однако в последние годы ситуация в этой области стала меняться к лучшему благодаря появлению отечественного инструментально программного комплекса «CASE-Аналитик».

Современные методы структурно-функционального анализа и моделирования сложных систем были заложены благодаря трудам профессора Массачусетского технологического института Дугласа Росса, который впервые использовал понятие "структурный анализ" сорок лет назад, пытаясь создать алгоритмический язык АРТ, ориентированный на модульное программирование. Дальнейшее развитие идеи описания сложных объектов как иерархических, многоуровневых модульных систем с помощью относительно небольшого набора типовых элементов привело к появлению SADT (Structured Analyses and Design Technique), что в дословном переводе означает "технология структурного анализа и проектирования", а по существу является методологией структурно-функционального моделирования и анализа сложных систем [10]. Со времени своего появления SADT постоянно совершенствовалась и широко использовалась для эффективного решения целого ряда проблем - таких как совершенствование управления финансами и материально-техническим снабжением крупных фирм, разработка программного обеспечения АСУ телефонными сетями, долгосрочное и стратегическое планирование деятельности фирм, проектирование вычислительных систем и сетей и др.

Центральной идеей SADT является, по определению авторов, SA-блок - универсальная единица универсальной пунктуации для неограниченного строго структурного анализа. Несмотря на такое мудреное название под таинственным SA-блоком скрывается обычный функциональный блок, характеризующийся наличием ***входа, выхода, механизма и управления.*** Другим фундаментальным понятием SADT является принцип иерархической декомпозиции сверху вниз, позволяющий анализировать сколь угодно сложные системы. При ближайшем рассмотрении его тоже открытием не назовешь, так как любой метод структурного анализа использует декомпозицию, которая собственно и составляет один из основных принципов познания. Оригинальным же в SADT является эффективный метод кодирования связей, основанный на использовании специальных ICOM-кодов и позволивший не только упростить процедуру моделирования, но и автоматизировать процедуры структурно-функционального анализа.

Одним из первых программных комплексов структурно-функционального анализа на основе SADT был пакет AUTOIDEF0, разработанный в рамках программы ВВС США по созданию интегрированной автоматизированной системы управления производством (Integreted Computer Aided Manufacturing). В основе пакета лежит подмножество SADT, названное IDEF0. AUTOIDEF0 предназначался для облегчения процесса создания и рецензирования SADT-диаграмм и моделей для географически удаленных аэрокосмических подрядчиков. Поскольку модели часто рецензировались и исправлялись, система функционировала на диалоговых устройствах и сетях связи и включала в себя тогда еще редкие дисплеи с векторной графикой и графопостроители. Система AUTOIDEF0 предоставляла удаленным пользователям командно-ориентированную графическую среду, управляемую с помощью иерархического меню, которое облегчало работу с библиотекой диаграмм и графическими средствами. Одновременно могло создаваться, храниться, обрабатываться, публиковаться и архивироваться множество различных моделей, построенных по единой методологии средствами SADT.

Вопросы для самопроверки

1. Какие математические модели называют дескриптивными.
2. В чём состоит различие между дескриптивными и оптимизационными моделями
3. Какие бывают физические модели
4. Что принято называть математической моделью

5. Какова классификация математических моделей
6. Что называют детерминированными математическими моделями
7. В чём отличие вероятностных моделей от детерминированных
8. Что такое имитационное математическое моделирование
9. В чём отличие компьютерного и обычного математического моделирования
10. что называют структурно-функциональным моделированием

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Черняков М.В., Петрушин А.С**. Основы информационных технологий. Учебник для ВУЗов. / М.В. Черняков, А.С. Петрушин. - М.: ИКЦ Академкнига, 2007. - 407 с.
2. «Информатика». Базовый курс. / Под ред. Симоновича П.А. - СПб.: Изд-во «Питер», 2008, 640 с.
3. **Кашина И.А.** Информационно-правовые системы в экономической деятельности / И.А. Кашина [и др.] - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
4. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В.** Математическое моделирование в бизнесе. Практикум. / В.Е. Лихтеншейн., Г.В. Росс. - М.:ФиС, 2008. -509 с.
5. Информатизация бизнеса: концепции, технологии, системы / А.М. Карминский [и др.] 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 624с.
6. Математическое моделирование управления: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Г.А. Титаренко. - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
7. Информационные системы и технологии в экономике и управлении: Учебник / Под ред. проф. В.В. Трофимова. – М.: Высшее образование, 2009. – 480с.

Дополнительная

1. **Розанов А.В., Федоров В.К.** Программирование персональных компьютеров. Электронный учебник на CD-ROM. / А.В. Розанов, В.К. Федоров. - Саратов, 2006
2. **Макаров В.Ф.** Аутентификация электронного документооборота и защита информации с использованием методов ассиметричного преобразования данных. / В.Ф. Макаров [и др.] - М.: РГТЭУ, 2006. - 58 с.
3. **Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П.** Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. - М.: ИНФРА – М, 2003.
4. **Зайцев М. Г.** Методы оптимизации управления для менеджеров: компьютерно–ориентированный подход. Учебное пособие. / М. Г. Зайцев. - М.: Дело, 2002.

Лекция 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1.Основные определения

В настоящее время одним из наиболее перспективных направлений применения компьютерного моделирования является эконометрика. Слово «эконометрика» представляет собой комбинацию двух слов: «экономика» и «метрика» (от греч. «метрон»). Эта наука возникла в результате взаимодействия и объединения в особый «сплав» трех компонент: экономической теории, статистических и математических методов. Впоследствии к ним присоединилась вычислительная техника как условие быстрого развития эконометрики.

Эконометрика – это наука об экономических измерениях. Цель эконометрики состоит в том, чтобы придать количественные меры взаимосвязям экономических отношений и процессов. Цель эконометрики – эмпирический вывод экономических законов. Эконометрика дополняет теорию, используя реальные данные для проверки и уточнения постулируемых отношений. Эконометрика – это что-то среднее между экономикой, статистикой, и математикой.

Предметы эконометрики и статистики очень близки. Эконометрика имеет дело с массовыми экономическими явлениями. Статистика имеет дело с массовыми явлениями любой природы, в том числе и в экономике. Специфика эконометрики состоит в том, что она ставит своей задачей при помощи статистики выразить те закономерности, которые экономическая теория и математическая экономика определяют в общем виде. Эконометрика имеет дело с конкретными экономическими данными и занимается количественным описанием конкретных взаимосвязей, то есть заменяет коэффициенты, представленные в общем виде в этих взаимосвязях, конкретными численными значениями.

С помощью эконометрики формулируют экономические модели, основываясь на экономической теории или на эмпирических данных, оценивают неизвестные параметры в этих моделях, делают прогнозы и дают рекомендации по экономической политике.

Например, микроэкономическая теория утверждает, что снижение цены товара приводит к увеличению спроса на данный товар (при условии неизменности всех остальных факторов), то есть устанавливается связь между спросом на товар и ценой на него. Однако микроэкономическая теория не дает количественных оценок данной связи, то есть не позволяет ответить на вопрос о том, насколько изменится спрос на данный товар в результате изменения его цены на определенную величину. Расчет количественных оценок и есть задача эконометрики.

Во всей этой деятельности существенным является использование математических уравнений и моделей, модифицируемых с тем, чтобы обеспечить возможность проведения эмпирических расчетов. В основном это математические модели, их мы и будем рассматривать. Большинство эконометрических методов и приемов заимствовано из математической статистики. Однако, экономические данные часто содержат ошибки измерения. В эконометрике разрабатываются специальные методы анализа, позволяющие устранить или снизить влияние этих ошибок на результаты.

Становление и развитие эконометрического метода происходили на основе так называемой высшей статистики – на методах парной и множественной регрессии, парной, частной и множественной корреляции, выделения тренда и других компонент временного ряда, на статистическом оценивании. Р.Фишер писал: «Статистические методы являются существенным элементом в социальных науках, и, в основном, именно с помощью этих методов социальные учения могут подняться до уровня наук».

В эконометрических исследованиях сами уравнения регрессии стали обосновываться содержательно. Например, зависимость себестоимости (y) от объема производства (x) (количества единиц продукции) может быть представлена как

Затраты на производство	=	Затраты не зависящие от объема производства (постоянные затраты)	+	Затраты, зависящие от объема производства (переменные затраты)
y*x	=	b	+	a*x

Разделив обе части уравнения на объем производства (x), получим следующее:

Затраты на производство 1 ед. продукции	=	Постоянные затраты на 1 ед. продукции	+	Переменные затраты на 1 ед. продукции
y	=	b/x	+	a

Параметры такого уравнения могут оцениваться методом наименьших квадратов, но особенность его в том, что каждый параметр имеет совершенно определенный экономический смысл.

Эконометрическая модель, как правило, основана на теоретическом предположении о круге взаимосвязанных переменных и характере связи между ними. При всем стремлении к «наилучшему» описанию связей приоритет отдается качественному анализу. Поэтому в качестве этапов эконометрического исследования можно указать:

- постановку проблемы;
- получение данных, анализ их качества;
- спецификацию модели;
- оценку параметров;
- интерпретацию результатов.

Этот список не очень подробен, но включает те стадии, которые проходит любое исследование, независимо от того, на использование каких данных оно ориентировано: пространственных или временных.

Основной базой данных для эконометрических исследований служат данные официальной статистики либо данные бухгалтерского учета. Таким образом, проблемы экономического измерения – это проблемы статистики и учета. Используя экономическую теорию, можно определить связь между признаками и показателями, а используя статистику и учет – ответить на вопросы, связанные с конкретными значениями экономических показателей.

При моделировании экономических процессов используют два типа данных:

- пространственные данные;
- временные данные.

Пространственными данными является набор сведений по разным объектам, взятым за один и тот же период или момент времени. Например набор сведений по разным фирмам (объем производства, численность работников, размер основных производственных фондов, доход за определенный период и т.д.). Примером таких данных может служить данные об объеме, ценах потребления некоторого товара по потребителям.

Временными данными является набор сведений, характеризующих один и тот же объект, но за разные периоды или моменты времени. Примером временных данных могут служить ежемесячные или ежеквартальные данные о средней заработной плате, индексе потребительских цен, объеме выпуска или, например, ежедневный курс доллара или евро на бирже. Отличительной особенностью временных данных является то, что они естественным образом упорядочены по времени, кроме того, наблюдения в близкие моменты времени могут быть зависимы.

Набор сведений представляет собой множество признаков, характеризующих объект исследования. Признаки являются взаимосвязанными, причем в этой взаимосвязи они могут выступать в одной из двух ролей:

- в роли результативного признака (аналог зависимой переменной y в математике);
- в роли факторного признака, значения которого определяют значения признака-результата (аналог независимой переменной x в математике).

В эконометрической модели результативный признак называют объясняемой переменной, а факторный признак называют объясняющей переменной.

3.2. Классификация эконометрических моделей

Главным инструментом эконометрических исследований является эконометрическая модель. Математические модели широко применяются в бизнесе, в экономике, общественных науках и даже в политике. Их удобно использовать для более полного понимания сущности происходящих процессов, анализа данных, прогнозирования и т.д. Можно выделить три класса моделей, используемых в эконометрике:

Модель временных рядов. Модель, в которой результативный признак является функцией переменной времени или переменных, относящихся к другим моментам времени.

К моделям, представляющим собой зависимость результативного признака от времени, относятся следующие модели:

- тренда (тренд представляет собой устойчивое изменение уровня показателя результативного признака в течение длительного времени):

$y(t) = T(t) + \varepsilon_t$, где $T(t)$ – временной тренд заданного параметрического вида (например, линейный $T(t) = a + bt$), ε_t – случайная (стохастическая) компонента;

- сезонности (ее характеризуют устойчивые внутригодовые колебания уровня показателя результата):

$y(t) = S(t) + \varepsilon_t$, где $S(t)$ – периодическая (сезонная) компонента, ε_t – случайная (стохастическая) компонента;

- тренда и сезонности:

$y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon_t$ – аддитивная

$y(t) = T(t) \cdot S(t) + \varepsilon_t$ – мультипликативная,

где $T(t)$ – временной тренд заданного параметрического вида, $S(t)$ – периодическая (сезонная) компонента, ε_t – случайная (стохастическая) компонента.

К моделям временных данных, представляющих собой зависимость результативного признака от переменных, датированных другими моментами времени, относятся модели:

- объясняющие поведение результативного признака в зависимости от предыдущих значений факторных признаков (модели с распределенным лагом);
- объясняющие поведение результативного признака в зависимости от предыдущих значений результативных признаков (модели авторегрессии);
- объясняющие поведение результативного признака в зависимости от будущих значений факторных или результативных признаков (модели ожидания);

Общей чертой всех моделей этого класса является то, что они объясняют поведение временного ряда исходя только из его предыдущих и будущих значений.

Регрессионная модель с одним уравнением. В таких моделях результативный признак (зависимая или объясняемая переменная) представляется в виде функции факторных признаков (независимых или объясняющих переменных):

$$f(x,\beta)=f(x_1,\ldots,x_k,\beta_1,\ldots,\beta_p),$$

где $x_1,\ldots,x_k$ – факторные признаки, $\beta_1,\ldots,\beta_p$ – параметры при этих факторах.

В зависимости от количества факторных признаков различают парную и множественную регрессию, кроме того, в зависимости от вида функции объясняющей связь переменных модели подразделяются на линейные и нелинейные. Например, можно исследовать спрос на мороженое как функцию от времени, температуры воздуха, среднего дохода или зависимость зарплаты от возраста, квалификации, образования, пола и т.д.

Область применения моделей этого вида, даже самых простых, линейных, намного шире, чем моделей временных рядов.

Ниже приведено несколько примеров регрессионных моделей с одним уравнением.

• функция цены: P = f (Q, Pk), где цена определенного товара P зависит от объёма его поставки Q и от цен конкурирующих товаров Pk;

• функция спроса: Q_d = f (P, Pk, I), где величина спроса на определенный товар Q_d зависит от цены данного товара P, от цен конкурирующих товаров Pk и от реальных доходов потребителей I;

• производственная функция: Q = f (L, K), представляет собой зависимость объёма производства определенного товара от производственных факторов – затрат капитала K и затрат труда L;

Системы взаимосвязанных уравнений. Системы могут состоять из тождеств и регрессионных уравнений, каждое из которых может включать в себя не только объясняющие переменные, но и объясняемые переменные из других уравнений системы. Таким образом, мы имеем набор объясняемых переменных, связанных через уравнения системы. Уравнения системы могут быть либо тождествами, либо поведенческими уравнениями. Для тождеств характерно, что их вид и значения параметров известны. В поведенческих уравнениях значения параметров требуется оценить.

Примером системы одновременных уравнений является модель спроса и предложения, включающая 3 уравнения: где Q_t^s – предложение товара в момент времени t;

Q_t^d – спрос на товар в момент времени t;

P_t – цена товара в момент времени t;

P_{t-1} – цена товара в предыдущий момент момент времени t-1;

I_t – доход потребителей в момент времени t.

Данная модель «объясняет» две результативные переменные:

1) Q_t – объем спроса, равный объему предложения в момент времени t;

2) P_t – цену товара в момент времени t.

$$\begin{cases} Q_t^s = a_0 + a_1 \cdot P_t + a_2 \cdot P_{t-1} & \text{уравнение предложения,} \\ Q_t^d = b_0 + b_1 \cdot P_t + b_2 \cdot I_t & \text{уравнение спроса,} \\ Q_t^s = Q_t^d & \text{тождество равновесия,} \end{cases}$$

Приведённые коэффициенты *a* и *b* называются структурными коэффициентами модели.

Вопросы для самоконтроля

1. Определение эконометрики.
2. С какими науками связана эконометрика?
3. Каковы этапы эконометрического исследования?
4. Сформулируйте задачи решаемые эконометрикой.
5. Алгоритм эконометрического исследования.
6. Необходимые условия построения моделей
7. Какие типы данных используются в эконометрических исследованиях?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Баклушина, О. А**. Эконометрика : учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 2008
2. **Валеев С. Г.** Эконометрика: учебно-практическое пособие / С. Г. Валеев, С. В. Куркина. - Ульяновск: УлГТУ, 2008
3. **Валентинов В.А.** Эконометрика: практикум / В.А. Валентинов. - М.: «Дашков и К», 2008. - 436 с.
4. **Воскобойников, Ю. Е.** Эконометрика в Excel : учебное пособие. Ч. 2. - Новосибирск: НГАСУ, 2008
5. **Гладилин А.В.,** Эконометрика: учебное пособие /А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – 2-е изд., стер. – М .: КНОРУС, 2008. – 232 с.
6. **Доугерти К.** Введение в эконометрику: Учебник 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2007.- 432 с
7. **Кремер И.Ш.** Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. 2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-Дана, 2008. - 311 с.
8. **Тихомиров И.П.** Эконометрика: учебник /Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. -- 2-е изд., стереотип. -- М.: Изд-во «Экзамен», 2007. - 512 с.

Дополнительная

1. **Кашина И.А., Кашин В.К., Нечаев Д.Ю., Чекмарев Ю.В.** Информационно-правовые системы в экономической деятельности. - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
2. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В.** Информационные технологии в бизнесе. Практикум. М.: ФиС, 2008. -509 с.
3. **Арсеньев Ю.Н.** Информационные системы и технологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 447 с.
4. **Барановская Т.П. и др**. Информационные системы и технологии в экономике. М.: ФиС, 2007. - 412 с.

Лекция 4

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

4.1. Модель парной регрессии

В эконометрике широко применяются методы статистики и математики в отношении экономических процессов. Сначала строится математическая модель. Одна из наиболее простых моделей – нормальная простая (парная) регрессия. Хотя в чистом виде она встречается достаточно редко, её использование помогает понять суть процессов и исследовать их. Вообще говоря, изучение парной регрессии является базовым во всем курсе эконометрики. Обычно парная регрессия используется в том случае, когда из всего круга факторов, влияющих на результат, можно выделить один, оказывающий наиболее сильное влияние. Он и используется в качестве объясняющей переменной.

Представим, что у нас есть два ряда данных:

$$X = x_1, x_2, \ldots, x_n,$$
$$Y = y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

где n – число наблюдений.

Каждое из наблюдений характеризуется двумя переменными x_i, y_i. В парной линейной регрессии связь между переменными определяется следующим образом:

$$y = \hat{y}(x) + \varepsilon = a + b \cdot x + \varepsilon,$$

где y – зависимая (объясняемая) переменная, реальная или фактическая или, как её ещё называют, эмпирическая, то есть, наблюдавшаяся в действительности; x – независимая (экзогенная) переменная; $\hat{y}(x)$ – зависимая переменная (эндогенная), рассчитанная с помощью уравнения регрессии, ещё её называют теоретической (в данном случае она рассчитывается по линейному уравнению регрессии); a, b – константы, параметры уравнения линейной регрессии; ε – случайная компонента, или возмущение.

Уравнение простой регрессии характеризует связь между двумя переменными, которая проявляется как некоторая закономерность лишь в среднем в целом по совокупности наблюдаемых данных. Например, если зависимость потребления электроэнергии y от объема выпускаемой продукции x можно представить в следующем виде $y = 1500 + 24{,}8 \cdot x$, то это означает, что при увеличении объема выпуска на 1 единицу потребление электроэнергии в среднем увеличивается на 24,8 единиц. То есть, в уравнении регрессии связь между результатом и фактором представляется, как бы в качестве функциональной связи. Причем представление функции может быть как линейным, так и нелинейным.

Самым простым способом определения вида связи, является построение поля корреляции. Каждую пару наблюдений (x_i, y_i) можно отобразить в качестве точки на плоскости XY (рис. 1). В этом случае наилучшей функцией считается та, чей график проходит через наибольшее количество точек или как можно ближе к ним.

В каждом из наблюдений величину случайной компоненты можно определить как разность между фактическим значением результата и рассчитанным по уравнению регрессии:

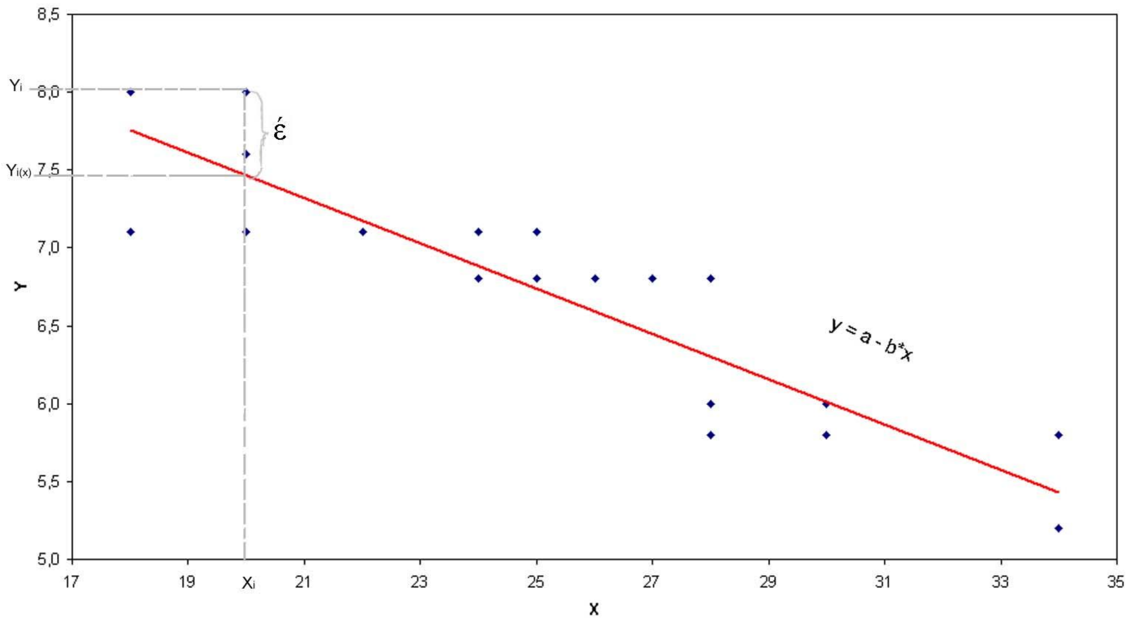
$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Если на графике все точки (x_i, y_i) совпадают с линией регрессии, тогда между результативным признаком Y и фактором X существует строгая функциональная связь и выполняется следующее равенство:

$\varepsilon_i = 0$ для каждого i = 1, 2, …, n.

В экономических процессах такое практически не встречается, экономические данные обычно не связаны строгой функциональной связью. Но во всех случаях, когда применение МНК оправдано, верно, что $\sum_i \varepsilon_i = 0$, поэтому в качестве меры отклонений используется сумма квадратов отклонений $\sum_i \varepsilon_i^2$.

Рис.1 . Распределние значений х и у на координатной плоскости



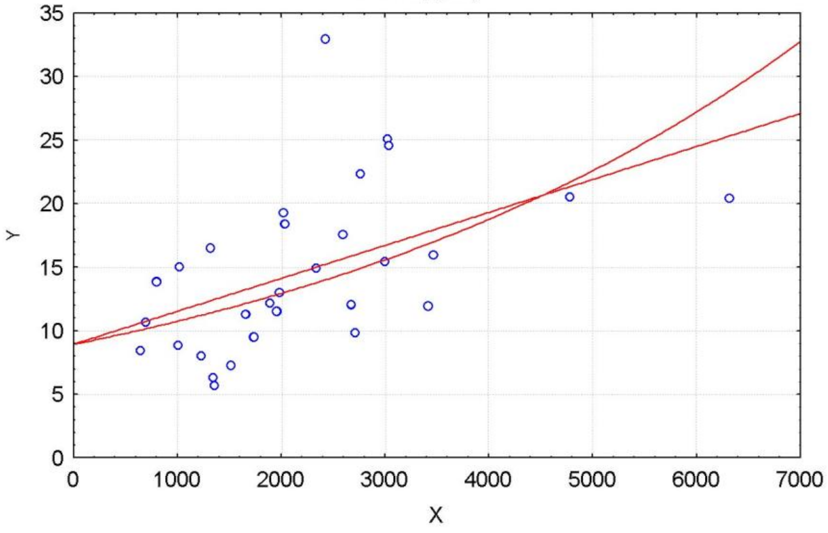
Случайная компонента ε по своей сути есть случайная величина, также она называется возмущением. Она характеризует собой влияние не учтенных в модели факторов, каких-либо случайных влияний, неправильный выбор специфики модели и, в некоторых случаях, может быть связана с особенностями измерения. Как уже было сказано, данные, который характеризуют экономический процесс, не могут быть связаны строгой функциональной связью, кроме того, в эконометрическом исследовании используется случайная выборка данных, что и обуславливает постоянное наличие случайной компоненты. Размер остаточной дисперсии $D_{ост}$ также может зависеть от выбранного вида уравнения регрессии. Соответственно, чем она меньше, тем лучше подобрана функция.

При эконометрических изысканиях часто встречаются ошибки различного рода. Их принято делить на 3 вида:

Ошибки спецификации. От правильно выбранной спецификации модели зависит величина случайных ошибок: чем ближе рассчитанные с помощью уравнения регрессии значения результативного признака $\hat{y}_x$ подходят к фактическим данным у.

К ошибкам спецификации относятся не только неправильный выбор той или иной математической функции для расчета $\hat{y}_x$, но и отсутствие в построенном уравнении регрессии какого-либо существенного фактора, то есть, использование парной регрессии вместо множественной или двухфакторной вместо трехфакторной. Например, ценность работника зависит не только от его квалификации, здесь влияние могут оказывать и такие факторы как возраст, пол и т.д. Ошибки спецификации – это ошибки, которые могут быть сведены исследователем к минимуму с помощью изменения вида уравнения регрессии, заменой линейной связи на нелинейную, как лучше подходящую (рис.2.)

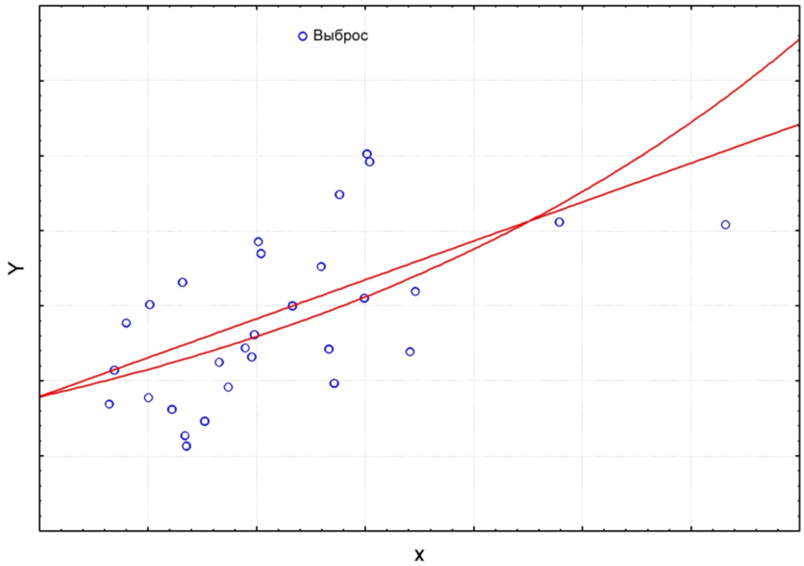
Рис.2. Подбор функции
Y = a+b*x
Y= a*exp(b*x)



Например, из этого рисунка ясно, что нелинейное уравнение лучше описывает связь между результатом у и фактором х.

Ошибки выборки. Они могут иметь место наряду с ошибками спецификации, поскольку исследователь чаще всего имеет дело с выборочными данными при установлении закономерной связи между признаками. В выборке встречаются аномальные значения признаков или так называемые выбросы. Как правило, это бывает при изучении экономических процессов. Аномальные значения (выбросы) очень сильно влияют на результаты анализа слайд 12(рис. 3). Если совокупность неоднородна, то уравнение

Рис. 3. Аномальные значения признаков



регрессии может не иметь практического смысла. Для получения хорошего результата обычно исключают из совокупности единицы с аномальными значениями исследуемых признаков. И в этом случае результаты регрессии представляют собой выборочные характеристики. Также для получения более достоверных результатов регрессии можно увеличить объем исследуемой выборки данных.

На этом рисунке видно, что некоторые значения выборки следует для улучшения результатов регрессии исключить из выборки.

Ошибки измерения. Они представляют наибольшую опасность в практическом использовании методов регрессии. Если ошибки спецификации можно уменьшить, изменяя форму модели, а ошибки выборки – увеличивая объем исходных данных, то ошибки измерения практически не поддаются минимизации. И все усилия по количественной оценке связи между признаками не приносят хороших результатов. Особенно часто ошибки измерения встречаются при исследовании на макроуровне. Так, в исследованиях спроса и потребления в качестве объясняющей переменной широко используется «доход на душу населения». Вместе с тем статистическое измерение величины дохода сопряжено с рядом трудностей и не лишено возможных ошибок, например в результате наличия сокрытых доходов. Классическим примером также является эконометрические изыскания, основанные на экономических показателях, которые предприятия представляют в налоговые инспекции, вышестоящие организации, органы, занимающиеся статистическими исследованиями. Достоверность этих данных никто не подтверждает, и чем больше в исследование попадает такой непроверенной информации, не соответствующе реальной действительности, тем больше ошибки измерения. К сожалению, такие ошибки практически невозможно устранить, так же, как невозможно проверить достоверность всей информации.

При проведении эконометрических исследований за основу принимается предположение о том, что ошибки измерения отсутствуют или сведены к минимуму, и большая часть внимание уделяется уменьшению ошибок спецификации.

В парной регрессии выбор вида математической функции $\hat{y}_x = f(x)$ может быть осуществлен тремя методами:

- графическим;
- аналитическим, то есть исходя из теории изучаемой взаимосвязи;
- экспериментальным.

При изучении зависимости между двумя признаками графический метод подбора вида уравнения регрессии достаточно нагляден. Он основан на поле корреляции. Просто подбирается функция, график которой проходит через наибольшее количество точек или как можно ближе к ним. Существует набор функций, используемых наиболее часто

Аналитический метод подразумевает хорошее знание экономики и основан на изучении материальной природы связи исследуемых признаков, теоретических соображениях и опыте подобных предыдущих исследований.

Экспериментальный метод основан на переборе нескольких функций., то есть для каждой строится уравнение регрессии, для каждой оценивается качество регрессии и по этим показателям выбирается лучшая. Наиболее часто этот метод используется при обработке данных на компьютере. Большинство статистических пактом включает в себе автоматический перебор наиболее распространенных функций, а также пользователю предоставляется возможность добавлять дополнительные интересующие его функции. Основным показателем при переборе функций является остаточная дисперсия $D_{ост}$. Необходимо заметить, что нельзя сравнивать $D_{ост}$ по разным данным, сравнению подаются только остаточные дисперсии по одним и тем же данным, но рассчитанные по разным уравнениям регрессии. Если для нескольких функций $D_{ост}$ одинаковы, то предпочтение отдается наиболее простому по виду уравнению регрессии, так как они более удобны для понимания, для них требуется меньшее количество наблюдений и расчеты, связанные с оцениванием качества регрессии, более просты.

Результаты многих исследований подтверждают, что число наблюдений должно в 6 ÷ 7 раз превышать число рассчитываемых параметров при переменной х. Это означает, что искать линейную регрессию, имея менее 7 наблюдений, вообще не имеет смысла. Если вид функции усложняется, то требуется увеличение объема наблюдений, ибо каждый параметр при х должен рассчитываться хотя бы по 7 наблюдениям. Значит, если мы выбираем параболу второй степени $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$, то требуется объем информации уже не менее 14 наблюдений. Учитывая, что эконометрические модели часто строятся по данным рядов динамики, ограниченным по протяженности (10, 20, 30 лет), при выборе спецификации модели предпочтительна модель с меньшим числом параметров при x.

4.2. Оценка параметров модели

После того как выбрана модель, определен её вид, следующим шагом является оценивание параметров модели. Для линейной парной регрессии вида

$$y = \hat{y}(x) + \varepsilon = a + b \cdot x + \varepsilon$$

необходимо оценить (найти фактическое значение) свободный член уравнения регрессии (константу) a и коэффициент регрессии b.

Для определения параметров модели можно использовать следующие критерии (слайд 13):

1) Сумму квадратов отклонений фактических значений результата y от рассчитанных с помощью уравнения регрессии $\hat{y}_x$:

$$S = \sum (y - \hat{y}_x)^2$$

Метод, использующий эту сумму, называется методом наименьших квадратов и является одним из основных методов эконометрики. В дальнейшем мы будем кратко его называть МНК.

2) Сумму модулей отклонений наблюдаемых значений зависимой переменной от её расчетных величин:

$$S = \sum \left| y - \hat{y}_x \right|$$

3) Отклонения, включаемые в сумму с определенной мерой:

$S = \sum g \cdot (y - \hat{y}_x)$, где g – мера, с которой отклонение для i-ого наблюдения входит в функционал.

При использовании МНК оптимальными будут значения параметров регрессии, минимизирующие функционал S.

Для оценки параметров модели линейной регрессии наиболее часто используется МНК, согласно которому в качестве оценок параметров принимают величины a и b, минимизирующие сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений результативного признака y от расчетных (теоретических) слайд 14.

$$S = \sum (y - \hat{y}_x)^2 = \sum (y - (a + b \cdot x))^2 \to \min.$$

Значения рядов наблюдений x и y нам известны. В уравнении необходимо найти два параметра a и b. Поэтому записывают частные производные данной функции по параметрам *a* и *b* и приравнивают их к нулю.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b \cdot x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_i - a - b \cdot x_i) = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b \cdot x_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_i - a - b \cdot x_i) = 0.$$

Из этих равенств мы получим систему нормальных уравнений для оценки параметров a и b (слайд 14):

$$\begin{cases} \sum y = a \cdot n + b \cdot \sum x \\ \sum y \cdot x = a \cdot \sum x + b \cdot \sum x^2 \end{cases}$$

Решая данную систему , найдем оценки параметров регрессии:

$$b = \frac{n \cdot \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{n \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{\sum x \cdot y - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum x^2 - n \cdot (\overline{x})^2} = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^2} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}.$$

Так как $\operatorname{cov}(x, y) = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}$ – ковариация признаков;

$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ – дисперсия признака x, то b можно представить в несколько ином виде:

$$b = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}.$$

Параметр b называют коэффициентом регрессии. Его величина показывает, насколько в среднем изменяется значение результативного признака при изменении факторного на одну единицу. Значения параметра b не имеют ограничений. Если коэффициент регрессии больше 0, то при увеличении фактора результат увеличивается и линия регрессии . Если же коэффициент регрессии меньше нуля, то при возрастании фактора результат уменьшается, в этом случае линия регрессии имеет отрицательный наклон.

Параметр a оценивается по следующей формуле:

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}.$$

Правильность расчета параметров уравнения регрессии может быть проверена с помощью сравнения сумм $\sum y = \sum \hat{y}_x$. На практике из-за округления при расчетах возможно некоторое расхождение.

Рассмотрим, как найти параметры регрессии на практике. Предположим, по нескольким предприятиям есть два ряда наблюдений: выпуск продукции и суммы затрат на производство. Зависимость между объемом выпуска и затратами можно представить в виде парной линейной регрессии (табл. 4.1).

Таблица 4.1. Исходные данные для решения системы уравнений

№ п.п.	Y(затраты на производство, тыс. руб.)	X (объем выпуска, тыс.ед.)	$y \cdot x$	x^2	y_x
1	68,80	45,10	3102,88	2034,01	66,68
2	61,20	41,30	2527,56	1705,69	62,61
3	59,90	38,70	2318,13	1497,69	59,82
4	56,70	36,50	2069,55	1332,25	57,46
5	55,00	36,20	1991,00	1310,44	57,13
6	54,30	32,40	1759,32	1049,76	53,06
7	49,30	28,10	1385,33	789,61	48,44
Итого	405,20	258,30	15153,77	9719,45	405,20
Среднее	57,89	36,90	2164,82	1388,49	57,89

$$b = \frac{2164{,}82 - 57{,}89 \cdot 36{,}9}{1388{,}49 - 36{,}9^2} = \frac{2164{,}82 - 2136{,}14}{1388{,}49 - 1361{,}61} = \frac{28{,}68}{26{,}88} = 1{,}07,$$

$$a = 57{,}89 - 1{,}07 \cdot 36{,}9 = 57{,}89 - 39{,}48 = 18{,}41.$$

Уравнение регрессии, описывающей зависимость затрат от объема выпуска будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{y}_x = 18{,}41 + 1{,}07 \cdot x,$$

то есть при увеличении объема выпускаемой продукции на 1 тысячу единиц затраты на производство возрастают на 1070 рублей. По этому уравнению рассчитаем теоретические значения результата и сравним суммы $\sum y = \sum \hat{y}_x$. Как видно из таблицы 1, это равенство выполняется.

Возможность четкой экономической интерпретации коэффициента регрессии в линейном уравнении сделала эту модель наиболее популярной в эконометрических исследованиях. В отличие от коэффициента регрессии, параметр a – значение результата y при факторе x=0. Если признак-фактор x не имеет и не может иметь нулевого значения, то такая трактовка свободного члена a не имеет смысла. Параметр a может не иметь экономического содержания. Попытки экономически интерпретировать параметр a могут привести к абсурду, особенно при a < 0. Интерпретировать можно только знак при параметре a. Если $a > 0$, то относительное изменение результата происходит медленнее, чем изменение фактора.

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. При использовании линейной регрессии в качестве такого показателя выступает линейный коэффициент корреляции r_{xy}. Существуют несколько видов формулы линейного коэффициента корреляции. Основные из них приведены ниже:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Как известно, линейный коэффициент корреляции всегда находится в границах: $-1 \le r_{xy} \le 1$. Знак коэффициента регрессии определяет знак коэффициента корреляции. Если b<0, тогда $-1 \le r_{xy} \le 0$, и наоборот, если b>0, тогда $0 \le r_{xy} \le 1$. Чем ближе значение коэффициента корреляции по модулю, то есть $|r_{xy}|$, к единице, тем теснее связь между признаками в линейной форме. Однако, если абсолютная величина коэффициента корреляции близка к нулю, это означает, лишь, что между рассматриваемыми признаками отсутствует линейная связь. При другом виде уравнения регрессии связь может оказаться достаточно тесной.

В рассмотренном нами ранее примере коэффициент корреляции равен 0,97 (r_{xy}=0,97), что обозначает достаточно тесную связь между результатом и фактором в данном случае.

Для оценки качества подбора линейного уравнения регрессии находят также квадрат коэффициента корреляции, также называемый коэффициентом детерминации $R^2 = (r_{xy})^2$. Коэффициент детерминации характеризует долю вариации результативного признака, объясненную с помощью уравнения регрессии, или как можно сказать, долю дисперсии результата, объясненную регрессией в общей дисперсии y:

$$R^2 = \frac{\operatorname{var}(y_x)}{\operatorname{var}(y)} = \frac{\sigma^2_{y\,объясн}}{\sigma^2_{y\,общ}} = \frac{\sum (y_x - \bar{y})^2 : n}{\sum (y - \bar{y})^2 : n} = \frac{\sum (y_x - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}.$$

Соответственно, величина (1-R^2) характеризует долю вариации или долю дисперсии результата y, вызванную влиянием всех остальных, неучтенных в модели факторов. Значения коэффициента детерминации могут меняться от нуля до единицы, $0 \le R^2 \le 1$.

Для нашего примера R^2=0,94 обозначает, что уравнением регрессии объясняется 94% дисперсии результативного признака, а прочими, неучтенными в модели, факторами – 6%. Чем ближе коэффициент детерминации, тем меньше роль других факторов и лучше линейное уравнение регрессии описывает исходные данные.

4.3. Оценка существенности уравнения регрессии и его параметров

После того как найдено уравнение линейной регрессии и оценки его параметров, проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом осуществляется с помощью критерия Фишера, так называемого F-критерия. При этом выдвигается нулевая гипотеза H_0, что коэффициент регрессии равен нулю, то есть b = 0, а, значит, фактор x не оказывает влияния на результат y и линия регрессии параллельна оси абцисс.

Перед тем как приступить к расчету критерия Фишера, проведем анализ дисперсии. Мы можем общую сумму квадратов отклонений y от $\bar{y}$ разложить на суммы – объясненную регрессией и необъясненную:

$$\sum(y-\bar{y})^2=\sum(\hat{y}_x-\bar{y})^2+\sum(y-\hat{y}_x)^2,$$

где $\sum(y-\bar{y})^2$ – общая сумма квадратов отклонений индивидуальных значений результата от среднего по выборке;

$\sum(\hat{y}_x-\bar{y})^2$ – сумма квадратов отклонений, объясненная регрессией;

$\sum(y-\hat{y}_x)^2$ – сумма квадратов отклонений, необъясненная регрессией, ещё её называют остаточной суммой квадратов отклонений;

Общая сумма квадратов отклонений результативного признака y от среднего значения вызвана влиянием различных причин. Условно всю совокупность причин можно разделить на две группы: изучаемый фактор x и прочие, случайные и не включаемые в модель, факторы. Если фактор не оказывает влияния на результат, то линия регрессии на графике параллельна оси ox и $\bar{y}=\hat{y}_x$. Тогда вся дисперсия результативного признака обусловлена воздействием прочих факторов и общая сумма квадратов отклонений совпадает с остаточной:

$$\sum(y-\bar{y})^2=\sum(y-\hat{y}_x)^2.$$

Если же прочие факторы не влияют на результат, то y связан с x функционально, и остаточная сумма квадратов равна нулю. В этом случае сумма квадратов отклонений, объясненная регрессией, совпадает с общей суммой квадратов:

$$\sum(y-\bar{y})^2=\sum(\hat{y}_x-\bar{y})^2.$$

Поскольку не все точки поля корреляции лежат на линии регрессии, то всегда имеет место их разброс как обусловленный влиянием фактора x, то есть регрессией y по x, так и вызванный действием прочих причин (необъясненная вариация). Пригодность линии регрессии для прогноза зависит от того, какая часть общей вариации признака y приходится на объясненную вариацию. Очевидно, что если сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией, будет больше остаточной суммы квадратов, то уравнение регрессии статистически значимо и фактор x оказывает существенное воздействие на результат y. Это равносильно тому, что коэффициент детерминации R^2 будет приближаться к единице.

Любая сумма квадратов отклонений связана с числом степеней свободы df, то есть с числом свободы независимого варьирования признака. Число степеней свободы связано с числом единиц совокупности n и с числом определяемых по ней констант. Применительно к исследуемой проблеме число степеней свободы должно показать, сколько независимых отклонений из n возможных (формула 4.1)

$$[(y_1-\bar{y}),(y_2-\bar{y}),(y_3-\bar{y}),\ldots,(y_n-\bar{y})] \qquad (4.1)$$

требуется для образования данной суммы квадратов. Для общей суммы квадратов $\sum(y-\overline{y})^2$ требуется (n - 1) независимых отклонений, ибо по совокупности из n единиц после расчета среднего уровня свободно варьируют лишь (n - 1) число отклонений. Например, имеем ряд значений y: 1,2, 3, 4, 5. Среднее из них равно 3, и тогда и отклонений от среднего составят: -2; -1; 0; 1; 2. Так как $\sum(y-\overline{y})^2=0$, то свободно варьируют лишь четыре отклонения, а пятое отклонение может быть определено, если предыдущие четыре известны.

При расчете объясненной или факторной (так как значения $\hat{y}_x$ зависит от значений фактора x) суммы квадратов $\sum(\hat{y}_x-\overline{y})^2$ используются теоретические значения результативного признака $\hat{y}_x$, найденные по линии регрессии: $\hat{y}_x=a+b\cdot x$.

В линейной регрессии

$$\sum(\hat{y}_x-\overline{y})^2=b^2\cdot\sum(x-\overline{x})^2 \qquad (4.2)$$

В этом можно убедиться, обратившись к формуле линейного коэффициента корреляции:

$$r_{xy}=b\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \qquad (4.3)$$

если возведем в квадрат все равенство, получим следующее:

$$r_{xy}^2=b^2\cdot\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}, \qquad (4.4)$$

а так как $R^2=(r_{xy})^2$

σ_y^2 – общая дисперсия результата,

$b^2\cdot\sigma_x^2$ – дисперсия результата, обусловленная фактором x.

Соответственно для линейной регрессии выполняется и равенство

$$\sum(\hat{y}_x-\overline{y})^2=b^2\cdot\sum(x-\overline{x})^2 \qquad (4.5)$$

Поскольку при определенном объеме наблюдений по x и y факторная сумма квадратов при линейной регрессии зависит только от одной постоянной – коэффициента регрессии b, то данная сумма квадратов имеет одну степень свободы. К этому же выводу можно прийти, если рассмотреть составляющие расчетного значения признака $\hat{y}_x$. Величина $\hat{y}_x$ определяется по уравнению линейной регрессии:

$$\hat{y}_x=a+b\cdot x \qquad (4.6)$$

Параметр a можно определить как

$$a=\overline{y}-b\cdot\overline{x} \qquad (4.7)$$

Подставив выражение параметра a в линейную модель и получим:

$$\hat{y}_x=\overline{y}-b\cdot\overline{x}+b\cdot x=\overline{y}-b\cdot(x-\overline{x})$$

Отсюда видно, что при заданном наборе переменных y и x расчетное значение $\hat{y}_x$ является в линейной регрессии функцией только одного параметра – коэффициента регрессии. Отсюда следует, что факторная сумма квадратов отклонений имеет число степеней свободы, равное 1.

Существует равенство между числом степеней свободы общей, факторной и остаточной суммами квадратов. Число степеней свободы остаточной суммы квадратов при линейной регрессии составляет (n – 2). Число степеней свободы для общей суммы квадратов определяется числом единиц, и поскольку мы используем среднюю вычисленную по данным выборки, то теряем одну степень свободы, то есть $df_{общ} = n - 1$. Теперь мы имеем два равенства:

$$\sum(y-\bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2 + \sum(y - \hat{y}_x)^2, \quad (4.8)$$
$$n - 1 = 1 + (n - 2).$$

Разделив каждую сумму квадратов на соответствующее ей число степеней свободы, дисперсии на одну степень свободы.

$$D_{общ} = \frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-1},$$
$$D_{факт} = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{1}, \quad (4.9)$$
$$D_{ост} = \frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2}{n-2}.$$

Так как это дисперсии на одну степень свободы, их можно сравнивать между собой. Критерии Фишера позволяет проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что факторная и остаточная дисперсии на одну степень свободы равны между собой $D_{факт} = D_{ост}$. Критерий Фишера рассчитывается по следующей формуле: $F = \frac{D_{факт}}{D_{ост}}$. (3.7)

Если гипотеза H_0 подтверждается, то факторная и остаточная дисперсии одинаковы и уравнение регрессии незначимо. Чтобы отвергнуть нулевую гипотезу и подтвердить значимость уравнения регрессии в целом, необходимо, чтобы факторная дисперсия на одну степень свободы превышала остаточную дисперсию на одну степень свободы в несколько раз. Существуют специальные таблицы критических значений Фишера при разных уровнях надежности и различных степенях свободы. Эти таблицы содержат максимальные значения отношения дисперсий, при которых нулевая гипотеза подтверждается. Значение критерия Фишера сравнивается с табличным и на основе этого гипотеза H_0 принимается или отвергается.

Если $F_{факт} > F_{табл}$, тогда гипотеза H_0 отклоняется и делается вывод, что связь между y и x существенна и уравнение регрессии статистически значимо; если же $F_{факт} \le F_{табл}$, тогда гипотеза H_0 принимается и делается вывод, что уравнение регрессии статистически незначимо, так как существует риск (при заданном уровне надежности) сделать неправильный вывод о наличии связи между x и y.

В рассматриваемом нами примере (таблица 1) рассчитаем критерий Фишера:

$$D_{ост} = \frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2}{n-2} = \frac{13{,}87}{5} = 2{,}77,$$
$$D_{факт} = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{1} = 215{,}45,$$
$$F = \frac{D_{факт}}{D_{ост}} = \frac{215{,}45}{2{,}77} = 77{,}78,$$
$$F_{табл} = 6{,}61 \text{ при } \alpha = 0{,}05,$$
$$F_{табл} = 16{,}26 \text{ при } \alpha = 0{,}01.$$

Так как фактическое значение критерия Фишера больше табличного $F_{факт} > F_{табл}$ и при уровне значимости равном 95%, и при равном 99%, то можно с уверенность отвергнуть нулевую гипотезу, и сделать вывод о значимости уравнения регрессии, то есть связь между результативным и факторным признаками существует и её можно выразить через уравнение линейной парной регрессии.

Между F-критерием и коэффициентом детерминации существует связь. Факторную сумму квадратов отклонений можно выразить через следующую формулу:

$$\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2 = r_{xy}^2 \cdot \sigma_y^2 \cdot n, \qquad (4.10)$$

а остаточную сумму квадратов отклонений:

$$\sum(y - \hat{y}_x)^2 = (1 - r_{xy}^2) \cdot \sigma_y^2 \cdot n \qquad (4.11)$$

Следовательно, критерия Фишера можно представить как

$$F = \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot (n - 2) \qquad (4.12)$$

Проверим на примере. В нашем примере коэффициент детерминации

R^2=0,94, выразим через него F-критерий: $F = \frac{0{,}94}{1 - 0{,}94} \cdot (7 - 2) = 78{,}33$. Небольшие расхождения результатов связаны с округлением.

В линейной регрессии часто оценивается не только значимость уравнения регрессии в целом, но и значимость отдельных его параметров, а также коэффициента корреляции.

Для того провести такое оценивание, для всех параметров рассчитываются стандартные ошибки: m_a, m_b, m_r.

$m_b = \sqrt{\frac{\sum(y - \hat{y}_x)^2 : (n - 2)}{\sum(x - \bar{x})^2}}$, обозначив остаточную дисперсия на одну степень свободы как S^2, получим $m_b = \sqrt{\frac{S^2}{\sum(x - \bar{x})^2}}$;

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum(y - \hat{y}_x)^2}{n - 2} \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum(x - \bar{x})^2}} = \sqrt{S^2 \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum(x - \bar{x})^2}};$$

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}.$$

Величина стандартных ошибок применяется не только для проверки значимости параметров, но и для расчета доверительных интервалов.

В нашем примере величины стандартных ошибок будут следующими:

$m_b = \sqrt{\frac{2{,}77}{188{,}18}} = 0{,}121$ – стандартная ошибка коэффициента регрессии;

$m_a = \sqrt{2{,}77 \cdot \frac{9719{,}45}{7 \cdot 188{,}18}} = 4{,}521$ – стандартная ошибка свободного члена регрессии;

$m_r = \sqrt{\frac{1 - 0{,}94}{5}} = 0{,}11$ – стандартная ошибка коэффициента корреляции.

Чтобы оценить существенность параметров, необходимо рассчитать для них критерии Стьюдента t_a, t_b, t_r. Для параметров a и b и коэффициента корреляции r_{xy} критерий Стьюдента определяет соотношение между самим параметром и его ошибкой.

$t_b = \frac{b}{m_b}$, $\qquad H_0$: b=0;

$t_a = \frac{a}{m_a}$, $\qquad H_0$: a=0.

Для коэффициента корреляции формулу расчета критерия Стьюдента можно несколько преобразовать и она будет иметь несколько иной вид:

$$t_r = \frac{r_{xy}}{m_r} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2} \qquad (4.13)$$

H_0: $r_{xy} = 0$.

Фактические значения критерия Стьюдента сравниваются с табличными значениями при определенном уровне надежности α и числе степеней свободы df = (n - 2). И на основе этого принимаются или отвергаются нулевые гипотезы о несущественности параметров или коэффициента корреляции. Если фактическое значение критерия Стьюдента больше табличного, тогда гипотеза о несущественности отвергается. Подтверждение существенности коэффициента регрессии равнозначно подтверждению существенности всего уравнения регрессии.

В нашем примере:

$$t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{1{,}07}{0{,}121} = 8{,}843\ ,$$

$$t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{18{,}41}{4{,}521} = 4{,}072,$$

$$t_r = \frac{r}{m_r} \cdot = \frac{0{,}97}{0{,}11} = 8{,}818.$$

Табличное значение критерия Стьюдента при $\alpha = 0{,}05$ и df = 5 равно 2,57. То есть, сравнив полученные нами фактические значения критериев Стьюдента для нашего примера с табличным значением, можно уверенно сделать вывод о существенности свободного члена уравнения регрессии a, коэффициента регрессии b, коэффициента корреляции r_{xy}, а также и о существенности всего уравнения в целом.

В парной линейной регрессии между критерием Фишера, критерием Стьюдента коэффициента регрессии, критерием Стьюдента коэффициента корреляции существует связь. Докажем наличие этой связи сначала для критерия Фишера и критерия Стьюдента коэффициента корреляции:

$$t_r = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2}\ ,(3.12) \qquad F = \frac{r^2}{1-r^2} \cdot (n-2) \qquad (4.14)$$

Следовательно, $F = t_r^2$.

Теперь рассмотрим связь между критерием Фишера и критерием Стьюдента для коэффициента регрессии:

так как $t_b = \dfrac{b}{m_b}$, то

$$t_b^2 = \frac{b^2}{m_b^2} = b^2 : \frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2 : (n-2)}{\sum(x-\bar{x})^2} = \frac{b^2 \cdot \sum(x-\bar{x})^2}{\sum(y-\hat{y}_x)^2 : (n-2)} =$$

$$= \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{\sum(y-\hat{y}_x)^2 : (n-2)} = \frac{D_{факт}}{D_{ост}} = F, \quad \text{следовательно } F = t_b^2$$

А следовательно можно эти равенства записать следующим образом:

$F = t_b^2 = t_r^2$ или $\sqrt{F} = t_b = t_r$. В нашем примере значения критериев Стьюдента t_b^2 и t_r^2 не совпали из-за округления.

Рассмотренная формула оценки коэффициента корреляции рекомендуется к применению при большом числе наблюдений n и если коэффициент корреляции r_{xy} по модулю не близок к единице. Если же абсолютная величина коэффициента корреляции близка к 1, то распределение его оценок отличается от нормального распределения или распределения Стьюдента, так как величина коэффициента корреляции ограничена значениями от -1 до +1. Чтобы обойти это затруднение, было предложено для оценки существенности r_{xy} ввести вспомогательную величину z, связанную с коэффициентом корреляции следующим отношением:

$$z = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + r_{xy}}{1 - r_{xy}}$$

Поскольку распределение величины z мало отличается от нормального даже при близких к единице значениях коэффициента корреляции r_{xy}, то стандартная ошибка величины z определяется по формуле:

$m_z = \dfrac{1}{\sqrt{n-3}}$, где n – число наблюдений.

Величину z можно не рассчитывать, а воспользоваться готовыми таблицами z-преобразований, в которых приведены значения величины z для соответствующих значений r_{xy}.

Критерий Стьюдента, необходимый для принятия решения о подтверждении гипотезы H_0 об отсутствии корреляции (H_0: $r_{xy} = 0$) рассчитывается по формуле (4.14) $t_z = \dfrac{z}{m_z}$ и затем сравнивается с табличным значением критерия Стьюдента (процедура аналогична предыдущей подобной).

Ввиду того, что r_{xy} и z связаны между собой приведенным выше соотношением, можно вычислить критические значения r, соответствующие каждому из значений z. Таблицы критических значений r_{xy} разработаны для уровней значимости 0,05 и 0,01 и соответствующего числа степеней свободы. Критические значения r_{xy} предполагают справедливость нулевой гипотезы об отсутствии корреляции. Если фактическое значение коэффициента корреляции по абсолютной величине превышает табличное, то данное значение r_{xy} считается существенным. Если же r_{xy} оказывается меньше табличного, то фактическое значение r несущественно

На основе стандартных ошибок параметров и табличных значений критерия Стьюдента можно рассчитать доверительные интервалы.

$\gamma_a = a \pm \Delta_a$,

$\gamma_b = b \pm \Delta_b$, где $\Delta_a = t_{табл} \cdot m_a$ – предельная ошибка параметра a,

$\Delta_b = t_{табл} \cdot m_b$ – предельная ошибка коэффициента регрессии b.

Для наших параметров при $\alpha = 0{,}05$ интервалы будут следующими:

$\gamma_{a_{min}} = 18{,}41 - 2{,}57 \cdot 4{,}521 = 18{,}41 - 11{,}62 = 6{,}79$,

$\gamma_{a_{max}} = 18{,}41 + 11{,}62 = 30{,}03$, (то есть $6{,}79 \le a \le 30{,}03$);

$\gamma_{b_{min}} = 1{,}07 - 2{,}57 \cdot 0{,}121 = 1{,}07 - 0{,}31 = 0{,}76$,

$\gamma_{b_{max}} = 1{,}07 + 0{,}31 = 1{,}38$, (то есть $0{,}76 \le b \le 1{,}38$);

Поскольку коэффициент регрессии в эконометрических исследованиях имеет четкую экономическую интерпретацию, то доверительные границы интервала для коэффициента регрессии не должны содержать противоречивых результатов, например: $-5 \leq b \leq 10$. Такого рода запись указывает, что истинное значение коэффициента регрессии одновременно содержит положительные и отрицательные величины и даже ноль, чего не может быть. В этом случае считается, что связь между данными нельзя выразить такой моделью (в частности парной линейной регрессией) и подбирается другая модель.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение парной регрессии
2. Поясните смысл коэффициента регрессии, назовите способы его оценивания, поясните, как он используется при расчётах экономических показателей.
3. Как трактуется коэффициент корреляции и коэффициент детерминации.
4. Что понимают под значимостью параметра?
5. Как оценивается значимость параметров уравнения регрессии?
6. Как производиться оценка значимости уравнения в целом?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Баклушина, О. А.** Эконометрика : учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 2008
2. **Валеев С. Г.** Эконометрика: учебно-практическое пособие / С. Г. Валеев, С. В. Куркина. - Ульяновск: УлГТУ, 2008
3. **Валентинов В.А.** Эконометрика: практикум / В.А. Валентинов. - М.: «Дашков и К», 2008. - 436 с.
4. **Воскобойников, Ю. Е.** Эконометрика в Excel : учебное пособие. Ч. 2. - Новосибирск: НГАСУ, 2008
5. **Гладилин А.В.,** Эконометрика: учебное пособие /А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – 2-е изд., стер. – М .: КНОРУС, 2008. – 232 с.
6. **Доугерти К.** Введение в эконометрику: Учебник 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2007.- 432 с
7. **Кремер И.Ш.** Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. 2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-Дана, 2008. - 311 с.
8. **Тихомиров И.П.** Эконометрика: учебник /Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. -- 2-е изд., стереотип. -- М.: Изд-во «Экзамен», 2007. - 512 с.

Дополнительная

1. **Кашина И.А., Кашин В.К., Нечаев Д.Ю., Чекмарев Ю.В.** Информационно-правовые системы в экономической деятельности. - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
2. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В.** Информационные технологии в бизнесе. Практикум. М.: ФиС, 2008. -509 с.
3. **Арсеньев Ю.Н.** Информационные системы и технологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 447 с.
4. **Барановская Т.П. и др.** Информационные системы и технологии в экономике. М.: ФиС, 2007. - 412 с.

Лекция 5

НЕЛИНЕЙНАЯ И МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

5.1. Виды нелинейной регрессии

При наличии прямолинейной зависимости между признаками устанавливается постоянное соотношение. Увеличение факторного признака х на единицу в среднем вызывает увеличение (или уменьшение) *у* на постоянную величину *b*. Линейные связи являются основными, параметры уравнения регрессии имеют экономическую интерпретацию. Однако при изучении социально-экономических явлений исследователь часто сталкивается с криволинейными зависимостями. Например, с увеличением осадков урожай (при прочих равных условиях) увеличивается до определенного предела, если же осадки являются излишними, то урожай уменьшается. С увеличением урожайности сельскохозяйственных культур себестоимость 1ц. продукции снижается, однако этот показатель никогда не будет равен нулю.

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций (например, равносторонней гиперболы $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$, степенной функции $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ или параболы второй степени $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$).

Различают два класса нелинейных регрессий:

- регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам. К ним, например, относятся полиномы различных степеней и равносторонняя гипербола.

Оценка параметров регрессий нелинейных по объясняющим переменным. Суть оценки состоит в замене «нелинейных» объясняющих переменных новыми «линейными» переменными и сведение нелинейной регрессии к линейной. Рассмотрим применение данного подхода к параболе второй степени:

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon \ x_1 = x,\ x_2 = x^2,$$

и получаем множественную линейную регрессию с двумя факторами

$$y = a + b \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \varepsilon,$$

причем b> 0, c<0, c<b (в этом случае оценка параметров происходит с помощью МНК для множественной регрессии). Примером может служить зависимость душевого дохода от возраста физического лица. Начиная примерно с 14 - 15 лет доход на 1 лицо постепенно повышается по мере получения образования, квалификации и продвижения по службе. Однако после 45 - 50 лет душевой доход уже не возрастает (если взять среднюю величину по всему населению) и начинает снижаться по мере перехода все большей части лиц на пенсию, или на более легкую, но ниже оплачиваемую работу.

Среди класса нелинейных, по оцениваемым параметрам, следует назвать равностороннюю гиперболу: $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$, заменим 1/x, т.е. $z = \frac{1}{x}$, и получаем простую линейную регрессию $y = a + b \cdot z + \varepsilon$. Может быть использована, например, для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов и топлива с объемом выпускаемой продукции. При b>0 имеем обратную зависимость, которая при $x \to \infty$ характеризуется нижней асимптотой, минимальным предельным значением у, оценкой которого служит параметр а. При b<0 имеем медленно повышающуюся функцию с верхней асимптотой при $x \to \infty$, т.е. максимальным предельным уровнем у, оценкой которого служит параметр а.

Для оценки параметров этих регрессий уже возможно использование МНК.

• регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам. К данному классу регрессий относятся уравнения, в которых y нелинейно связана с параметрами. Примером таких нелинейных регрессий являются функции:

- Степенная
- Показательная
- Экспоненциальная

Иначе обстоит дело с регрессиями, нелинейными по параметрам. Этот класс регрессий подразделяется на две группы: нелинейные модели, внутренне линейные, и нелинейные модели, внутренне нелинейные.

Если нелинейная модель внутренне линейна, то с помощью соответствующих преобразований её можно свести к линейному виду, и для полученной регрессии использовать метод наименьших квадратов.

Для степенной функции $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ соответствующим преобразованием будет логарифмирование $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + \ln \varepsilon$. Соответственно оценка параметров этой функции производиться не по изначальным рядам наблюдений X и Y, а по их логарифмам. Однако, чтобы рассчитать теоретические значения результативного признака, используется первоначальный вид функции. Также оценка качества уравнения регрессии оценивается по первоначальным данным, а не по преобразованным.

Если же нелинейная регрессия внутренне нелинейна, привести к линейному виду её невозможно, и для неё нельзя использовать МНК. В этом случае используются специальные итеративные процедуры. Есть специальный раздел математики, изучающий различные итеративные методы. Однако модели такого вида достаточно редко применяются в эконометрике, предпочтение отдается регрессиям, приводимым к линейному виду.

5.2. Корреляция для нелинейной регрессии

Для нелинейных регрессий, к которым можно применить метод наименьших квадратов, используются те же формулы, что и к линейным регрессиям. Исключение составляет коэффициент корреляции. Для нелинейных регрессий показателем тесноты связи выступает индекс корреляции p_{xy} (корреляционное отношение), который рассчитывается по следующей формуле:

$$p_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}.$$

Вместо коэффициента детерминации используется термин индекс детерминации, причем между индексом корреляции и индексом детерминации сохраняется то же соотношение, что между коэффициентами корреляции и детерминации для линейной регрессии.

Для нелинейных функций принято рассчитывать коэффициент эластичности, поскольку значения параметра b уже не имеют такой четкой интерпретации, как в линейной регрессии (исключение составляет степенная функция, для которой параметр b одновременно является коэффициентом эластичности). Коэффициент эластичности показывает на сколько процентов изменится результат при изменении фактора на 1 процент. Рассчитывается он как:

$Э = f'(x) \cdot \dfrac{x}{y}$, где $f'(x)$ - первая производная, характеризующая соотношение приростов результата и фактора для соответствующей формы связи.

Для степенной функции $Э = b$ всегда, для большинства других функций значение коэффициента эластичности будет зависеть от значений результата y и фактора x в каждом конкретном наблюдении. Поэтому более широко используется средний коэффициент эластичности, который показывает, на сколько процентов в среднем изменится результат при изменении фактора на 1%. Он одинаков для всей выборки наблюдений.

$$Э = f'(x) \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \cdot$$

Несмотря на широкое использование в эконометрике коэффициентов эластичности, возможны случаи, когда их расчет не имеет экономического смысла. Это происходит тогда, когда для рассматриваемых признаков бессмысленно определения рассматриваемых значений в процентах.

5.3. Множественная регрессия

Несмотря на то, что парная линейная регрессия легко поддается интерпретации, в действительности она встречается очень редко, более широкое применение получила множественная регрессия. Парная регрессия может дать хороший результат при моделировании, если влиянием других факторов, воздействующих на объект исследования, можно пренебречь. Например, при построении модели зависимости роста товарооборота в какой-либо торговой организации от количества обслуживающего персонала исследователь предполагает, что в каждой организации одного типа (розничный магазин, оптовая база) одинаково влияние на товарооборот таких факторов, как цена товаров, набор реализуемых товаров, торговая площадь, оформление площади, время работы. Однако исследователь никогда не может быть уверен в справедливости данного предположения. Для того чтобы иметь правильное представление о влиянии количества персонала на рост товарооборота, необходимо изучить их корреляцию при неизменном уровне других факторов. Прямой путь решения такой задачи состоит в отборе единиц совокупности с одинаковыми значениями всех других факторов, кроме дохода. Он приводит к планированию эксперимента – методу, который используется в различных исследованиях, в которых возможно планировать опыты (химические, физические и т.д.). Экономист, в отличие от экспериментатора-естественника, лишен возможности регулировать другие факторы. Поведение отдельных экономических переменных контролировать нельзя, то есть не удается обеспечить равенство всех прочих условий для оценки влияния одного исследуемого фактора. В этом случае следует попытаться выявить влияние других факторов, введя их в модель. Естественным продолжением парной линейной регрессии является множественная линейная регрессионная модель с p переменными.

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p + \varepsilon .$$

Такого рода уравнение может использоваться при изучении роста товарооборота (необходимо заметить, что каждый фактор x_i представляет собой набор из n наблюдений по одному и тому же признаку). Тогда коэффициенты b_i – частные производные товарооборота y по соответствующим факторам x_i:

$b_1 = \dfrac{dy}{dx_1}$, $b_2 = \dfrac{dy}{dx_2}$, …, $b_p = \dfrac{dy}{dx_p}$ при условии, что все остальные факторы неизменны.

Множественная регрессия широко используется в решении проблем спроса и потребления, доходности акций, при изучении функции издержек производства, в макроэкономических расчетах и целого ряда других вопросов эконометрики. В настоящее время множественная регрессия — один из наиболее распространенных методов в эконометрике. Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель.

Модель линейной множественной регрессии, для которой выполняются условия Гаусса-Маркова, называется нормальной линейной множественной регрессией. Самыми первыми проблемами, с которыми сталкивается исследователь при построении множественной регрессии, являются отбор факторов, которые будут учитываться в регрессионном уравнении, и выбор вида уравнения регрессии. Про выбор уравнения регрессии мы подробнее расскажем в главе 4, где будут рассматриваться нелинейные модели, как парные, так и множественные. А при отборе факторов существуют определенные правила, которые должны выполняться, иначе оценки параметров уравнения, да и само регрессионное уравнение будут недостоверными и не будут отражать связь результативного признака с факторными.

Включение в уравнение множественной регрессии тех или иных факторов связано, прежде всего, с представлением исследователя о природе взаимосвязи моделируемого показателя с другими экономическими явлениями, то есть исследователь должен иметь какие-либо экономические знания, позволяющие сделать вывод о наличии достаточно сильной связи между рассматриваемыми факторами и моделируемым показателем, и включить эти факторы в модель.

5.4. Отбор факторов и выбор формы уравнения множественной регрессии

Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям:

1. Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность (например, в модели урожайности качество почвы задается в виде баллов; в модели стоимости объектов недвижимости учитывается место нахождения недвижимости: районы могут быть проранжированы), наличию или отсутствию какого-либо признака также должно придаваться числовой значение (например, мужчина – 0, женщина – 1).
2. Каждый фактор должен быть достаточно тесно связан с результатом (то есть коэффициент парной линейной корреляции между каждым включаемым в модель фактором и результатом должен отличаться от нуля, причем достаточно сильно, чтобы подтвердить наличие связи).
3. Факторы не должны быть тесно связаны между собой и тем более находиться в строгой функциональной связи (они не должны коррелировать друг с другом, или, можно сказать по другому, они не должны быть интеркоррелированы). Включение в модель факторов с высокой интеркорреляцией, когда коэффициент корреляции между двумя факторами больше, чем коэффициент корреляции для любого из этих факторов с результатом (что обозначает более тесную связь между факторами, чем между фактором и результатом $R_{x_i y} < R_{x_i x_j}$) для зависимости

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p + \varepsilon$$

может привести к нежелательным последствиям – система нормальных уравнений может оказаться плохо обусловленной и повлечь за собой неустойчивость и ненадежность оценок коэффициентов регрессии.

Причем чем больше факторов, включаемых в модель, интеркоррелированы друг с другом, тем ненадежнее уравнение регрессии. Если между факторами существует высокая корреляция, то нельзя определить их изолированное влияние на результативный показатель и параметры уравнения регрессии оказываются неинтерпретируемыми. Так, в уравнении $y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \varepsilon$ предполагается, что факторы x_1 и x_2 независимы друг от друга, то есть $r_{x_1x_2}=0$. Тогда можно говорить, что параметр b_1 измеряет силу влияния фактора x_1 на результат y при неизменном значении фактора x_2. Если же $r_{x_1x_2}=1$, то с изменением фактора x_1 фактор x_2 не может оставаться неизменным. Отсюда b_1 и b_2 нельзя интерпретировать как показатели раздельного влияния x_1 и x_2 на y.

Включаемые во множественную регрессию факторы должны объяснить вариацию независимой переменной. Если строится модель с набором p факторов, то для нее рассчитывается показатель детерминации R^2, который фиксирует долю объясненной вариации результативного признака за счет рассматриваемых в регрессии p факторов. Влияние других не учтенных в модели факторов оценивается как $1-R^2$ с соответствующей остаточной дисперсией S^2.

При дополнительном включении в регрессию p+1 фактора коэффициент детерминации должен возрастать, а остаточная дисперсия уменьшаться (если, конечно, этот фактор оказывает существенное влияние на результат независимо от прочих факторов, включенных в модель ранее):

$$R^2_{(p+1)} \ge R^2_{(p)} \quad \text{и} \quad S^2_{(p+1)} \le S^2_{(p)}.$$

Если же этого не происходит и эти показатели практически не отличаются друг от друга, то включаемый в анализ фактор x_{p+1} не улучшает модель, а лишь усложняет её, и практически является лишним фактором. Если, например, в исследуемую множественную регрессию, включающую четыре фактора, и для которой коэффициент детерминации равен 0,785, а остаточная дисперсия 456,7, ввести дополнительно пятой фактор, после чего коэффициент детерминации составит 0,787, а остаточная дисперсия 454,2 (все значении результативного признака превышают 850), можно сказать, что скорее всего нет смысла включать этот дополнительный фактор в модель.

Насыщение модели лишними факторами не только не снижает величину остаточной дисперсии и не увеличивает показатель детерминации, но и приводит к статистической незначимости параметров регрессии по критерию Стьюдента.

Таким образом, хотя теоретически регрессионная множественная модель позволяет учесть любое число факторов, на практике в этом нет необходимости. Отбор факторов для включения в модель обычно осуществляется в два шага: на первом подбираются факторы исходя из экономической сущности проблемы (то есть набор факторов определяется непосредственно самим исследователем); на втором на основе матрицы показателей парной корреляции определяют тесноту связи для параметров регрессии.

Коэффициенты интеркорреляции (то есть корреляции между объясняющими переменными) позволяют исключать из модели дублирующие факторы. Считается, что две переменных явно коллинеарны, то есть находятся между собой в линейной зависимости если $r_{x_ix_j} \ge 0{,}7$.

Так как одним из условий построения уравнения множественной регрессии является независимость действия факторов, то коллинеарность факторов нарушает это условие. Если факторы явно коллинеарны, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Хитрость при исключении фактора состоит в том, что предпочтение отдается не фактору, более тесно связанному с результатом, а тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами, включаемыми в модель. В этом требовании проявляется специфика множественной регрессии как метода исследования совокупного воздействия факторов в условиях их независимости друг от друга.

Предположим, что при исследовании модели, включающей четыре фактора, была построена следующая матрица парных коэффициентов корреляции (См. Таблица 5.1).

Таблица 5.1. Матрица парных коэффициентов корреляции

	Y	x_1	x_2	x_3	x_4
Y	1				
x_1	0,75	1			
x_2	0,72	0,3	1		
x_3	0,79	0,71	0,81	1	
x_4	0,58	0,12	0,07	0,13	1

Из этой таблицы 5.1 вполне очевидно, что фактор x_3 тесно связан с факторами x_1 и x_2 ($r_{x_1x_3} > 0{,}7, r_{x_2x_3} > 0{,}7$), то есть при изменении факторов x_1 и x_2 фактор x_3 не может остаться неизменным. И, несмотря на то, что фактор x_3 имеет самую тесную связь с результатом, его следует исключить из модели, так как он имеет также достаточно сильную корреляцию с другими факторами (причем $r_{x_2x_3} > r_{x_3y}$, то есть связь между факторами даже более сильная, чем между фактором x_3 и результатом y).

Однако матрица парных коэффициентов корреляции (См. таблица 5.1) позволяет выявить лишь явную связь между факторами (попарно). Намного сложнее выявить так называемую мультиколлинеарность факторов, когда более чем два фактора связаны между собой нестрогой линейной зависимостью, то есть наибольшие трудности мы встречаем, когда необходимо выявить совокупное воздействие нескольких факторов друг на друга. Если при исследовании модели мы сталкиваемся в мультиколлинеарностью, это обозначает, что некоторые из включаемых в модель факторов всегда будут действовать вместе. И опять же возникает проблемы при оценке воздействия каждого фактора x_i на результат y в отдельности при неизменном значении прочих факторов, так как вариации мультиколлинеарных факторов перестают быть независимыми друг от друга. Чем сильнее мультиколлинеарность факторов, тем менее надежна оценка распределения суммы объясненной вариации по отдельным факторам с помощью метода наименьших квадратов.

Если рассматривается уравнение регрессии следующего вида:

$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + \varepsilon$, то при расчете параметров регрессии с помощью МНК, предполагается выполнение следующего равенства:

$S_y = S_{факт} + S_{ост}$,

где $S_y = \sum(y - \bar{y})^2$ – общая сумма квадратов отклонений;

$S_{факт} = \sum(\hat{y} - \bar{y})^2$ – факторная сумма квадратов отклонений (объясненная регрессией);

$S_{ост} = \sum(y - \hat{y})^2$ – остаточная сумма квадратов отклонений.

Также выполняется и следующее равенство, при условии, что факторы, учитываемые в модели, независимы друг от друга:

$S_{факт} = S_{x_1} + S_{x_2} + S_{x_3}$,

где $S_{x_1}, S_{x_2}, S_{x_3}$ – суммы квадратов отклонений, обусловленные влиянием соответствующих факторов.

Если факторы связаны между собой (и не важно, коррелированны ли они попарно, или мы столкнулись с мультиколлинеарностью) это равенство нарушается.

Включение в модель мультиколлинеарных факторов может привести к следующим нежелательным последствиям:

- Оценки параметров становятся ненадежными. Они обнаруживают большие стандартные ошибки, статистическую незначимость, причем в то же время модель в целом является значимой, то есть значение множественного коэффициента корреляции завышено.
- Оценки параметров могут иметь неправильные с точки зрения теории знаки или неоправданно большие значения, также можно столкнуться с тем, что при изменении объема наблюдений, по которым строится модель, оценки параметров меняют не только свою величину, но и знак, что недопустимо.
- Затрудняется интерпретация параметров множественной регрессии как характеристик действия каждого из факторов в чистом виде (факторы коррелированны и становится невозможным определить изолированное влияние каждого фактора на моделируемый показатель).

Нестрогая линейная зависимость между факторными признаками совсем необязательно ведет к неудовлетворительным оценкам. Если все остальные условия благоприятны, то есть число наблюдений достаточно, выборочные дисперсии факторных признаков велики, количество исследуемых факторных признаков больше 3-4 и мультиколлинеарны из них не более половины, дисперсия случайной компоненты мала, то в итоге можно получить вполне надежные оценки параметров регрессии. Рассмотрение данной проблемы начинается только тогда, когда это серьезно влияет на результаты оценки регрессии.

На практике о наличии мультиколлинеарности судят по матрице коэффициентов парной корреляции между факторами (почти такую мы уже рассматривали ранее, в нее не включается только корреляция с результативным признаком), точнее, по её определителю.

Предположим, что у нас есть модель следующего вида;

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + \varepsilon.$$

Построим для нее матрицу парной межфакторной корреляции:

$$\mathrm{Det}|R| = \begin{vmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_2x_1} & r_{x_3x_1} \\ r_{x_1x_2} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & r_{x_3x_3} \end{vmatrix}.$$

Если факторы совсем не коррелируют между собой, то определитель этой матрицы был бы равен 1, так как в этом случае выполнялось бы следующее:

$$r_{x_1x_1} = r_{x_2x_2} = r_{x_3x_3} = 1, \qquad r_{x_ix_j} = r_{x_jx_i}, \qquad r_{x_1x_2} = r_{x_1x_3} = r_{x_2x_3} = 0,$$

и матрица была бы единичной матрицей, поскольку все недиагональные элементы были бы равны нулю:

$$\mathrm{Det}|R| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Если же, наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны единице, то определитель такой матрицы равен нулю:

$$\operatorname{Det}|R| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Можно сделать вывод, что чем ближе к нулю определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результаты множественной регрессии. И, наоборот, чем ближе к единице определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Если имеет место ярко выраженная мультиколлинеарность, то в модель следует включать не все факторы, а только те, которые в меньшей степени ответственны за мультиколлинеарность (при условии, что качество модели снижается незначительно).

В наибольшей степени ответственным за мультиколлинеарность будет тот признак, который теснее связан с другими факторами модели (имеет более высокие по модулю значения коэффициентов парной линейной корреляции).

В нашем случае мы должны рассчитать определитель следующей матрицы:

$$\operatorname{Det}|R| = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}71 & 0{,}12 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}81 & 0{,}07 \\ 0{,}71 & 0{,}81 & 1 & 0{,}13 \\ 0{,}12 & 0{,}07 & 0{,}13 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}093$$

Поскольку определитель этой матрицы достаточно мал, можно сказать, что для факторов этой модели мультиколлинеарность отсутствует или очень слаба.

Есть ещё один способ определения факторов, ответственных за мультиколлинеарность. Он основан на вычислении коэффициентов множественной детерминации. В качестве зависимой переменной берется поочередно каждый из факторов, и коэффициент множественной детерминации показывает зависимость этого фактора x_i от всех других факторов модели $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_p$:

$$R^2_{x_i | x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_p}$$

Чем ближе значение коэффициента множественной детерминации к единице, тем сильнее проявляется мультиколлинеарность факторов. Сравнивая между собой коэффициенты множественной детерминации факторов, можно выделить переменные, ответственные за мультиколлинеарность, следовательно, можно решать проблему отбора факторов, оставляя в уравнении факторы с минимальной величиной коэффициента множественной детерминации.

Существует ряд подходов преодоления сильной межфакторной корреляции. Самый простой путь устранения мультиколлинеарности состоит в исключении из модели одного или нескольких факторов. Другой подход связан с преобразованием факторов, при котором уменьшается корреляция между ними. Например, при построении модели на основе рядов динамики переходят от первоначальных данных к первым разностям уровней $\Delta t = y_t - y_{t-1}$, чтобы исключить влияние тенденции, или используются такие методы, которые сводят к нулю межфакторную корреляцию, то есть переходят от исходных переменных к их линейным комбинациям, не коррелированных друг с другом (метод главных компонент). Одним из путей учета внутренней корреляции факторов также является переход к совмещенным уравнениям регрессии, то есть к уравнениям, которые отражают не только влияние факторов, но и их взаимодействие.

Отбор факторов, включаемых в регрессию, является одним из важнейших этапов практического использования методов регрессии. Подходы к отбору факторов на основе показателей корреляции могут быть разные. Они приводят построение уравнения множественной регрессии к разным методикам. В зависимости от того, какая методика построения уравнения регрессии принята, меняется алгоритм ее решения - на ЭВМ.

Наиболее широкое применение получили следующие методу построения уравнения множественной регрессии:

- метод исключения;
- метод включения;
- шаговый регрессионный анализ.

Каждый из этих методов по-своему решает проблему отбора факторов, давая в целом близкие результаты – отсев факторов из полного его набора (метод исключения), дополнительное введение фактора (метод включения), исключение ранее введенного фактора (шаговый регрессионный анализ).

При отборе факторов рекомендуется пользоваться следующим правилом: число включаемых факторов обычно в 6 ÷ 7 раз меньше объема совокупности, по которой строится регрессия. Если это соотношение нарушено, то число степеней свободы остаточной вариации очень мало. Это приводит к тому, что параметры уравнения регрессии оказываются статистически незначимыми, а F-критерий меньше табличного значения.

5.5. Метод наименьших квадратов

Параметры уравнения множественной регрессии оцениваются, как и в парной регрессии, методом наименьших квадратов (МНК). При его применении должна минимизироваться остаточная сумма квадратов отклонений фактических величин от теоретических. Для уравнения множественной регрессии

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p + \varepsilon$$

это выглядит следующим образом:

$$S = \sum (y - \hat{y})^2 = \sum (y - (a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p))^2 \to \min .$$

В данном случае неизвестными являются параметры регрессии a, b_1, $b_2, \ldots, b_p$. Чтобы найти их, мы дифференцируем остаточную сумму квадратов отклонений по этим переменным и приравниваем их к нулю.

В итоге строится система нормальных уравнений, решение которой и позволяет получить оценки параметров регрессии:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a + b_1 \cdot \sum x_1 + b_2 \cdot \sum x_2 + \ldots + b_p \cdot \sum x_p, \\ \sum y \cdot x_1 = a \cdot \sum x_1 + b_1 \cdot \sum x_1^2 + b_2 \cdot \sum x_2 \cdot x_1 + \ldots + b_p \cdot \sum x_p \cdot x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sum y \cdot x_p = a \cdot \sum x_p + b_1 \cdot \sum x_1 \cdot x_p + b_2 \cdot \sum x_2 \cdot x_p + \ldots + b_p \cdot \sum x_p^2. \end{cases}$$

Эта система может быть решена методом определителей:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad b_1 = \frac{\Delta b_1}{\Delta}, \quad b_2 = \frac{\Delta b_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad , \quad b_p = \frac{\Delta b_p}{\Delta},$$

где Δ – определитель системы,

Δa, Δb_1, Δb_2, …, Δb_p – частные определители.

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 & \ldots & \sum x_p \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_2 \cdot x_1 & \ldots & \sum x_p \cdot x_1 \\ \sum x_2 & \sum x_1 \cdot x_2 & \sum x_2^2 & \ldots & \sum x_p \cdot x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum x_p & \sum x_1 \cdot x_p & \sum x_2 \cdot x_p & \ldots & \sum x_p^2 \end{vmatrix},$$

а Δa, Δb_1, Δb_2, …, Δb_p получаются заменой соответствующего столбца матрицы определителя системы данными левой части системы.

Кроме того, для линейной множественной регрессии существует другой способ оценки параметров – через β-коэффициенты. В этом случае на основе матрицы коэффициентов парной корреляции строится уравнение регрессии в стандартизованном (стандартном) масштабе. При построении уравнения регрессии в стандартизованном масштабе все значения исследуемых признаков переводятся в стандарты (стандартизованные значения).

$$t_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2} + \ldots + \beta_p \cdot t_{x_p} + \varepsilon,$$

где t_y, t_{x_1}, $t_{x_2}, \ldots, t_{x_p}$ – стандартизованные переменные,

$$t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}, \quad t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}},$$

β_1, β_2, …, β_p – стандартизованные коэффициенты регрессии.

Таким образом, начало отсчета каждой стандартизованной переменной совмещается с её средним значением, а в качестве единицы изменения принимается ее среднеквадратическое отклонение σ. Коэффициенты β могут быть оценены с помощью обычного МНК. Применяя его к уравнению множественной регрессии в стандартизованном масштабе, после соответствующих преобразований получим систему нормальных уравнений вида:

$$\begin{cases} r_{x_1y} = \beta_1 + \beta_2 \cdot r_{x_1x_2} + \beta_3 \cdot r_{x_1x_3} + \ldots + \beta_p \cdot r_{x_1x_p}, \\ r_{x_2y} = \beta_1 \cdot r_{x_2x_1} + \beta_2 + \beta_3 \cdot r_{x_2x_3} + \ldots + \beta_p \cdot r_{x_2x_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{x_py} = \beta_1 \cdot r_{x_px_1} + \beta_2 \cdot r_{x_px_2} + \beta_3 \cdot r_{x_px_3} + \ldots + \beta_p. \end{cases}$$

Решая ее методом определителей, найдем параметры – стандартизованные коэффициенты регрессии (β-коэффициенты).

Стандартизованные коэффициенты регрессии показывают, на сколько сигм σ изменится в среднем результат, если соответствующий фактор x_i изменится на одну сигму при неизменном среднем уровне других факторов. В силу того, что все переменные заданы как центрированные и нормированные, стандартизованные коэффициенты регрессии β_i сравнимы между собой. Сравнивая их друг с другом, можно ранжировать факторы по силе их воздействия на результат. В этом основное достоинство стандартизованных коэффициентов регрессии в отличие от коэффициентов «чистой» регрессии, которые несравнимы между собой.

Если мы попытаемся привести в стандартизованный вид уравнение парной регрессии, то станет ясно, что в парной зависимости стандартизованный коэффициент регрессии есть не что иное, как линейный коэффициент корреляции r_{xy}. Подобно тому, как в парной зависимости коэффициенты регрессии и корреляции связаны между собой, так и во множественной регрессии коэффициенты «чистой» регрессии b_i связаны со стандартизованными коэффициентами регрессии β_i:

$$b_i = \beta_i \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}.$$

Эта связь позволяет от уравнения регрессии в стандартизованном масштабе $\hat{t}_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2} + \ldots + \beta_p \cdot t_{x_p}$ перейти к уравнению регрессии в натуральном масштабе переменных:

$$\hat{y} = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p .$$

Параметр a определяется как

$$a = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x}_1 - b_2 \cdot \bar{x}_2 - \ldots - b_p \cdot \bar{x}_p .$$

Так как стандартизованные коэффициенты регрессии позволяется сравнивать (то есть чем больше по модулю стандартизованный коэффициент регрессии, тем более тесно связан данный фактор с результатом), их можно использовать при отсеве факторов – из модели исключаются факторы с наименьшим значением β .

Компьютерные программы построения уравнения множественной регрессии в зависимости от использованного в них алгоритма решения позволяют получить либо только уравнение регрессии для исходных данных, либо, кроме того, уравнение регрессии в стандартизованном масштабе.

5.6. Множественная корреляция

Практическая значимость уравнения множественной регрессии оценивается с помощью показателя множественной корреляции и его квадрата – коэффициента детерминации.

Показатель множественной корреляции характеризует тесноту связи рассматриваемого набора факторов с исследуемым признаком, или, иначе, оценивает тесноту совместного влияния факторов на результат.

По аналогии с парной регрессией коэффициент множественной корреляции можно определить как долю дисперсии результата, объясненной вариацией включенных в модель факторов, в его общей дисперсии. Точнее, эту величину характеризует множественный коэффициент детерминации:

$$R^2_{yx_1x_2\ldots x_p} = 1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y} = 1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_{x_1x_2\ldots x_p})^2}{\sum (y - \bar{y})^2},$$

а множественный коэффициент корреляции может быть найден как корень из коэффициента детерминации:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_{x_1x_2\ldots x_p})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}} .$$

Границы изменения множественного коэффициента корреляции от 0 до 1. Чем ближе его значение к 1, тем теснее связь между результатом и всеми факторами в совокупности и уравнение регрессии лучше описывает фактические данные. Если множественный коэффициент корреляции $R_{yx_1x_2\ldots x_p}$ близок к нулю, то уравнение регрессии плохо описывает фактические данные и факторы оказывают слабое влияние на результат. Коэффициент множественной корреляции не может быть использован для интерпретации направления связи, в отличие от парного коэффициента корреляции.

Величина коэффициента множественной корреляции больше или равна величине максимального коэффициента парной корреляции:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} \geq \left| r_{yx_i(\max)} \right|, \text{ где } i = \overline{1,p} .$$

Если отбор факторов, включаемых в регрессию был проведен правильно, то множественный коэффициент корреляции значительно отличается от частных коэффициентов корреляции, так как характеризует тесноту связи между результатом и всеми факторамими в совокупности, и каждое включение в уравнение регрессии нового фактора (если, конечно, дополнительный фактор оказывает значимое влияние на результат), будет значимо увеличивать величину множественного коэффициента корреляции. Однако, если дополнительные факторы не оказывают существенного влияния на результат, величина множественного коэффициента корреляции изменится несущественно. Если же в уравнении регрессии учитывается какой-либо фактор, оказывающий наиболее сильное влияние на результативный признак, то частный коэффициент корреляции будет достаточно близок к множественному коэффициенту корреляции, но ни в коем случае не больше него.

Для линейной множественной регрессии коэффициент множественной корреляции может быть рассчитан и по следующей формуле

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}}\,,$$

где β_i – стандартизованный коэффициент регрессии для каждого из факторов;

r_{yx_i} – парный коэффициент корреляции для соответствующего фактора.

Легко убедиться, что эта формула верна, обратившись к уравнению в стандартизованном масштабе:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sum (t_y - \hat{t}_y)^2}{\sum (t_y - \bar{t}_y)^2}} = \sqrt{\frac{\sum (\hat{t}_y - \bar{t}_y)^2}{\sum (t_y - \bar{t}_y)^2}}\,.$$

Поскольку, $t_y = \dfrac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$, $\bar{t}_y = 0$ и $\sum (t_y - \bar{t}_y)^2 = \sum \bar{t}_y^2 = n$, тогда

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sum (t_y - \hat{t}_y)^2}{\sum (t_y - \bar{t}_y)^2}} = \sqrt{\frac{\sum (\hat{t}_y - \bar{t}_y)^2}{\sum (t_y - \bar{t}_y)^2}}\,,$$

а так как $\hat{t}_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2} + \ldots + \beta_p \cdot t_{x_p}$, то получаем следующее:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum \hat{t}_y \cdot (\beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2} + \ldots + \beta_p \cdot t_{x_p})} =$$

$$= \sqrt{\beta_1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum t_{x_1} \cdot \hat{t}_y + \beta_2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum t_{x_2} \cdot \hat{t}_y + \ldots + \beta_p \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum t_{x_p} \cdot \hat{t}_y} = .$$

$$= \sqrt{\beta_1 \cdot r_{yx_1} + \beta_2 \cdot r_{yx_2} + \ldots + \beta_p \cdot r_{yx_p}} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}}\,.$$

Соответственно, множественный коэффициент детерминации можно рассчитать по формуле

$$R^2_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sum \beta_i \cdot r_{yx_i}\,.$$

Множественный коэффициент корреляции[1] рассчитывается для линейной регрессии, поэтому его часто называют линейным коэффициентом множественной корреляции, а так иногда его упоминают как совокупный коэффициент корреляции. Иногда для его расчета используется ещё одна формула (она применима только для линейной множественной регрессии):

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}}\,,$$

[1] Дело в том, что по ранее указанным формулам можно рассчитывать показатель и для нелинейной множественной регрессии, в этом случае он будет называться индексом множественной корреляции.

где Δr – определитель матрицы парных коэффициентов корреляции;

Δr_{11} – определитель матрицы межфакторной корреляции.

Они будут иметь следующий вид для уравнения линейной множественной регрессии с p числом факторов:

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & r_{yx_p} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_p} \\ r_{yx_2} & r_{x_1x_2} & 1 & r_{x_2x_p} \\ \dots & & & \\ r_{yx_p} & r_{x_1x_p} & r_{x_2x_p} & 1 \end{vmatrix},$$

то есть матрица включает все парные коэффициенты для уравнения регрессии.

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_p} \\ r_{x_1x_2} & 1 & \dots & r_{x_2x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_1x_p} & r_{x_1x_2} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

то есть определяется из предыдущей матрицы путем исключения коэффициентов парной корреляции факторов с результатом, а проще говоря, вычеркиванием первой строки и первого столбца.

Однако во всех рассмотренных способах расчета коэффициента множественной корреляции используется остаточная дисперсия, которая имеет систематическую ошибку в сторону преуменьшения, тем более значительную, чем больше параметров включается в уравнение регрессии при определенном числе наблюдений. Чтобы не допустить возможного преувеличения тесноты связи, обычно используется скорректированный коэффициент множественной корреляции. Он содержит поправку на число степеней свободы. Остаточная сумма квадратов отклонений делится на число степеней свободы остаточной вариации (n – m - 1), общая сумма квадратов отклонений делится на число степеней свободы в общем по совокупности (n-1). Формула скорректированного коэффициента корреляции выглядит так:

$$\overline{R}_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sum(y-\hat{y})^2}{\sum(y-\overline{y})^2} : \frac{n-m-1}{n-1}},$$

где m – число параметров при переменных x (в линейной зависимости оно будет равно числу включаемых в модель факторов); n – число наблюдений.

Так как, $\dfrac{\sum(y-\hat{y})^2}{\sum(y-\overline{y})^2} = 1 - R^2$, то расчет величины скорректированного коэффициента корреляции можно представить в следующем виде:

$$\overline{R}_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{1 - (1-R^2)\cdot\frac{n-1}{n-m-1}};$$

а скорректированного коэффициента множественной детерминации –

$$\overline{R}^2_{yx_1x_2\dots x_p} = 1 - (1-R^2)\cdot\frac{n-1}{n-m-1}.$$

Как вполне очевидно из формулы, при увеличении параметров при факторах в уравнении регрессии, увеличивается и разница между скорректированным коэффициентом детерминации $\overline{R}^2$ и коэффициентом множественной детерминации R^2. При заданном числе наблюдений при увеличении числа факторов или включений их в уравнение регрессии скорректированный коэффициент детерминации уменьшается. В некоторых случаях его величина может стать и отрицательной при слабых связях результата с факторами. В этом случае он должен считаться равным нулю. При небольшом числе наблюдений скорректированная величина коэффициента множественной детерминации $\overline{R}^2$ имеет тенденцию переоценивать долю вариации результативного признака, связанную с влиянием факторов, включенных в регрессионную модель.

Вопросы для самоконтроля

1. Определение множественной регрессии. Как графически изображается связь между показателями уравнения регрессии?
2. Какие требования предъявляются к факторам, включаемым в уравнение регрессии?
3. Какие требования предъявляются к объёму наблюдений, необходимому для построения уравнения множественной регрессии?
4. Что такое мультиколлинеарность и как её вычислить? Как она может быть представлена графически?
5. Назовите основные этапы построения модели множественной регрессии.
6. Какие методы могут применяться для нахождения параметров уравнения регрессии?
7. Какова интерпретация коэффициентов модели множественной регрессии?
8. Что понимают под значимостью параметра?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Баклушина, О. А.** Эконометрика : учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 2008
2. **Валеев С. Г.** Эконометрика: учебно-практическое пособие / С. Г. Валеев, С. В. Куркина. - Ульяновск: УлГТУ, 2008
3. **Валентинов В.А.** Эконометрика: практикум / В.А. Валентинов. - М.: «Дашков и К», 2008. - 436 с.
4. **Воскобойников, Ю. Е.** Эконометрика в Excel : учебное пособие. Ч. 2. - Новосибирск: НГАСУ, 2008
5. **Гладилин А.В.,** Эконометрика: учебное пособие /А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – 2-е изд., стер. – М .: КНОРУС, 2008. – 232 с.
6. **Доугерти К.** Введение в эконометрику: Учебник 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2007.- 432 с
7. **Кремер И.Ш.** Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. 2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-Дана, 2008. - 311 с.
8. **Тихомиров И.П.** Эконометрика: учебник /Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. -- 2-е изд., стереотип. -- М.: Изд-во «Экзамен», 2007. - 512 с.

Дополнительная

1. **Кашина И.А., Кашин В.К., Нечаев Д.Ю., Чекмарев Ю.В.** Информационно-правовые системы в экономической деятельности. - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
2. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В.** Информационные технологии в бизнесе. Практикум. М.: ФиС, 2008. -509 с.
3. **Арсеньев Ю.Н.** Информационные системы и технологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 447 с.
4. **Барановская Т.П. и др**. Информационные системы и технологии в экономике. М.: ФиС, 2007. - 412 с.

Лекция 6

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

6.1. Модели стационарных и нестационарных временных рядов

Под временными рядами понимают экономические величины, зависящие от времени. При этом время предполагается дискретным, в противном случае говорят о случайных процессах, а не о временных рядах.

Рассмотрим временной ряд X(t). Пусть сначала временной ряд принимает числовые значения. Это могут быть, например, цены на батон хлеба в соседнем магазине или курс обмена доллара на рубли в ближайшем обменном пункте. Обычно в поведении временного ряда выявляют две основные тенденции - тренд и периодические колебания.

При этом под трендом понимают зависимость от времени линейного, квадратичного или иного типа, которую выявляют тем или иным способом сглаживания (например, экспоненциального сглаживания) либо расчетным путем, в частности, с помощью метода наименьших квадратов. Другими словами, тренд - это очищенная от случайностей основная тенденция временного ряда.

Временной ряд обычно колеблется вокруг тренда, причем отклонения от тренда часто обнаруживают правильность. Часто это связано с естественной или назначенной периодичностью, например, сезонной или недельной, месячной или квартальной (например, в соответствии с графиками выплаты заплаты и уплаты налогов). Иногда наличие периодичности и тем более ее причины неясны, и задача эконометрика - выяснить, действительно ли имеется периодичность.

Элементарные методы оценки характеристик временных рядов обычно достаточно подробно рассматриваются в курсах "Общей теории статистики".

6.2. Характеристики временных рядов

Для более подробного изучения временных рядов используются вероятностно-статистические модели. При этом временной ряд X(t) рассматривается как случайный процесс (с дискретным временем) основными характеристиками являются математическое ожидание X(t), дисперсия X(t), и автокорреляционная функция временного ряда X(t), т.е. функция двух переменных, равная коэффициенту корреляции между двумя значениями временного ряда X(t) и X(s).

В теоретических и прикладных исследованиях рассматривают широкий спектр моделей временных рядов. Выделим сначала стационарные модели. В них совместные функции распределения для любого числа моментов времени k, а потому и все перечисленные выше характеристики временного ряда не меняются со временем. В частности, математическое ожидание и дисперсия являются постоянными величинами, автокорреляционная функция зависит только от разности t - s. Временные ряды, не являющиеся стационарными, называются нестационарными.

Как видно из сказанного выше, основное - это "очистка" временного ряда от случайных отклонений, т.е. оценивание математического ожидания. В отличие от простейших моделей регрессионного анализа, здесь естественным образом появляются более сложные модели. Например, дисперсия может зависеть от времени. Такие модели называют гетероскедастичными, а те, в которых нет зависимости от времени - гомоскедастичными. (Точнее говоря, эти термины могут относиться не только к переменной "время", но и к другим переменным.)

Далее, предполагалось, что погрешности независимы между собой. В терминах настоящей главы это означало бы, что автокорреляционная функция должна быть вырожденной - равняться 1 при равенстве аргументов и 0 при их неравенстве. Ясно, что для реальных временных рядов так бывает отнюдь не всегда. Если естественный ход изменений наблюдаемого процесса является достаточно быстрым по сравнению с интервалом между последовательными наблюдениями, то можно ожидать "затухания" автокорреляции" и получения практически независимых остатков, в противном случае остатки будут автокоррелированы.

6.3. Системы эконометрических уравнений

Пример модели авторегрессии. В качестве первоначального примера рассмотрим эконометрическую модель временного ряда, описывающего рост индекса потребительских цен (индекса инфляции). Пусть I(t) - рост цен в месяц t. Тогда по мнению некоторых экономистов естественно предположить, что

$$I(t) = c \cdot I\,(t - 1) + a + b \cdot S\,(t - 4) + e, \tag{6.1}$$

где I(t - 1) - рост цен в предыдущий месяц (c - некоторый коэффициент затухания, предполагающий, что при отсутствии внешний воздействий рост цен прекратится), a - константа (она соответствует линейному изменению величины I(t) со временем), $b \cdot S$ (t - 4) - слагаемое, соответствующее влиянию эмиссии денег (т.е. увеличения объема денег в экономике страны, осуществленному Центральным Банком) в размере S (t - 4) и пропорциональное эмиссии с коэффициентом b, причем это влияние проявляется не сразу, а через 4 месяца; наконец, e - это неизбежная погрешность.

Модель (6.1), несмотря на свою простоту, демонстрирует многие характерные черты гораздо более сложных эконометрических моделей.

Во-первых, обратим внимание на то, что некоторые переменные определяются (рассчитываются) внутри модели, как I(t). Их называют эндогенными (внутренними). Другие задаются извне (это экзогенные переменные). Иногда, как в теории управления, среди экзогенных переменных, выделяют управляемые переменные - те, с помощью которых менеджер может привести систему в нужное ему состояние.

Во-вторых, в соотношении (6.1) появляются переменные новых типов - с лагами, т.е. аргументы в переменных относятся не к текущему моменту времени, а к некоторым прошлым моментам.

В-третьих, составление эконометрической модели типа (6.1) - это отнюдь не рутинная операция. Например, запаздывание именно на 4 месяца в связанном с эмиссией денег слагаемом $b \cdot S$ (t - 4) - это результат достаточно изощренной предварительной статистической обработки. Далее, требует изучения вопрос зависимости или независимости величин S (t - 4) и I(t). От решения этого вопроса зависит, как выше уже отмечалось, конкретная реализация процедуры метода наименьших квадратов.

Проблема идентифицируемости. Представим теперь модель тапа (6.1) с большим числом эндогенных и экзогенных переменных, с лагами и сложной внутренней структурой. Вообще говоря, ниоткуда не следует, что существует хотя бы одно решение у такой системы. Поэтому возникает не одна, а две проблемы. Есть ли хоть одно решение (проблема идентифицируемости)? Если да, то как найти наилучшее решение из возможных? (Это - проблема статистической оценки параметров.)

И первая, и вторая задача достаточно сложны. Для решения обоих задач разработано множество методов, обычно достаточно сложных (см. список литературы), лишь часть из которых имеет научное обоснование. В частности, достаточно часто пользуются статистическими оценками, не являющимися состоятельными (строго говоря, их даже нельзя назвать оценками).

6.4. Методы решение систем линейных эконометрических уравнений

Система линейных одновременных эконометрических уравнений. Чисто формально можно все переменные выразить через переменные, зависящие только от текущего момента времени. Например, в случае уравнения (6.1) достаточно положить

$$H(t) = I(t-1),\ G(t) = S(t-4).$$

Тогда уравнение пример вид

$$I(t) = c \cdot H(t) + a + b \cdot G(t) + e \qquad (6.2)$$

Отметим здесь же возможность использования регрессионных моделей с переменной структурой путем введения фиктивных переменных. Эти переменные при одних значениях времени (скажем, начальных) принимают заметные значения, а при других - сходят на нет (становятся фактически равными 0). В результате формально (математически) одна и та же модель описывает совсем разные зависимости.

6.5. Косвенный, двухшаговый и трехшаговый методы наименьших квадратов

Разработано много методов эвристического анализа систем эконометрических уравнений. Они предназначены для решения тех или иных проблем, возникающих при попытках найти численные решения систем уравнений.

Одна из проблем связана с наличием априорных ограничений на оцениваемые параметры. Например, доход домохозяйства может быть потрачен либо на потребление, либо на сбережение. Значит, сумма долей этих двух видов трат априори равна 1. А в системе эконометрических уравнений эти доли могут участвовать независимо. Возникает мысль оценить их методом наименьших квадратов, не обращая внимания на априорное ограничение, а потом подкорректировать. Такой подход называют косвенным методом наименьших квадратов.

Двухшаговый метод наименьших квадратов состоит в том, что оценивают параметры отдельного уравнения системы, а не рассматривают систему в целом. В то же время трехшаговый метод наименьших квадратов применяется для оценки параметров системы одновременных уравнений в целом. Сначала к каждому уравнению применяется двухшаговый метод с целью оценить коэффициенты и погрешности каждого уравнения, а затем построить оценку для ковариационной матрицы погрешностей, После этого для оценивания коэффициентов всей системы применяется обобщенный метод наименьших квадратов (см. выше).

Менеджеру и экономисту не следует становиться специалистом по составлению и решению систем эконометрических уравнений, даже с помощью тех или иных программных систем, но он должен быть осведомлен о возможностях этого направления эконометрики, чтобы в случае производственной необходимости квалифицированно сформулировать задание для специалистов-эконометриков.

От оценивания тренда (основной тенденции) перейдем ко второй основной задаче эконометрики временных рядов - оцениванию периода (цикла).

6.6. Оценивание длины периода и периодической составляющей

Рассмотрим достаточно широкий класс практически полезных непараметрических оценок длины периода и периодической составляющей во временных рядах. Из общих результатов статистики объектов нечисловой природы вытекает состоятельность этих оценок.

Начнем с того, что во многих прикладных задачах рассматривают временной ряд (или случайный процесс) y(t)=x(t)+e(t), где x(t) - детерминированная периодическая функция от времени t, т.е. x(t)=x(t+T) при некотором T, где T - длина периода (минимальная из возможных, поскольку 2T, 3T, 4T - тоже, как легко видеть, длины периодов), а e(t) - "шумы", случайные погрешности, искажающие периодический сигнал. Требуется оценить (минимальную) длину периода T и периодическую составляющую x(t). При этом не предполагается, что функция x(t) входит в какое-либо параметрическое семейство, например, конечных сумм синусов и косинусов, т.е. рассматривается задача непараметрического оценивания (минимальной) длины периода и периодической составляющей сигнала.

Примеры постановок конкретных прикладных задач оценивания.

1. В предположении цикличности экономических процессов требуется по статистическим данным установить длину цикла и на основе вида периодической составляющей построить прогноз, например, прогноз урожайности, емкости рынка тех или иных товаров или экономической активности в целом. В экономической литературе часто говорят об экономических циклах, но почти никогда не дают строгого определения понятия цикла. (Под строгим определением понимаем такое, согласно которому можно отличить "цикл" от "не цикла", можно выделить начало и конец цикла, отделить один цикл от другого, короче, однозначно выделить цикл как самостоятельный объект экономического изучения.)

2. По мнению ряда авторов, для среднесрочного прогнозирования развития социокультурной сферы (социально-политического "климата", живописи, музыки, архитектуры, поэзии и т.д.) необходимо выявить ее цикличность с помощью объективных измерений на базе субъективных первичных данных (т.е. на базе оценок экспертов).

3. В исторических событиях, описываемых согласно распространенной в настоящее время так называемой скалигеровской хронологии, обнаруживается цикличность. Эта цикличность полностью объясняется новой статистической хронологией, построенной с помощью специальных методов статистики объектов нечисловой природы, предназначенных для анализа текстов исторических хроник, и одновременно служит еще одним подтверждением новой статистической хронологии.

Описание метода оценивания. Пусть рассматриваемые функции y(t), x(t), e(t) определены на отрезке [0; A]. При фиксированном T рассмотрим "куски" сигнала y(t) на последовательных отрезках длины T, т.е. на отрезках [0;T], [T;2T], [2T;3T], ... Удобно ввести последовательность функций на отрезке [0;T], полученную сдвигами этих кусков к началу координат:

$$y_1(t) = y(t),\ y_2(t) = y(t+T),\ y_3(t) = y(t+2T),\ \dots$$

Всеони определены на отрезке [0; T]. Число этих функций равно числу полных периодов длины T, укладывающихся на отрезке [0; A], т.е. равно целой части числа A/T. Отметим еще раз, что если T - период, то 2T, 3T, 4T, ... - тоже периоды. В дальнейшем из всех периодов будем рассматривать и оценивать, как правило, только наименьший.

Если T=T0 - истинный период (или кратный ему) и погрешности e(t) отсутствуют, то все введенные в предыдущем абзаце функции совпадают между собой и с периодической составляющей:

$$x(t) = y_1(t) = y_2(t) = y_3(t)=\dots$$

при всех t из [0; T]. При наличии погрешностей полного совпадения не будет. Однако отклонения определяются лишь шумами в различные моменты времени. При этом в качестве оценки периодической составляющей x(t) естественно взять среднее арифметическое $y_{ср}(t)$ функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, ... (могут быть использованы и другие виды средних величин).

Если же T отличается от истинного периода T_0 (и кратных ему величин), то различия функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, ... между собой определяются также и различием значений x(t) в точках, отстоящих друг от друга на интервалы, длина которых кратна T.

В предположении отсутствия погрешностей (т.е. когда e(t) тождественно равно 0) рассмотрим поведение функции $y_{ср}(t)$ на отрезке [0; T] при росте длины интервала A наблюдения сигнала, а потому и при росте числа периодов - целой части числа A/T. Если T = T_0 или T кратно T_0, то, как уже сказано, $y_{ср}(t)$ совпадает с периодической составляющей x(t). Если число T/T_0 иррационально, то можно показать, что значения t+mT(modT0), где m - натуральные числа такие, что t+mT<A, асимптотически (при росте A) равномерно заполняют отрезок [0; T_0], а потому при выполнении соответствующих условий регулярности, например, непрерывности периодической составляющей сигнала, функция $y_{ср}(t)$ приближается к константе - среднему значению периодического сигнала x(t), т.е. интегралу от x(t) по отрезку [0; T_0], деленному на T_0. При этом при конечных A функция $y_{ср}(t)$ отлична от константы. (Здесь запись t+mT(modT_0) означает теоретико-числовое сравнение по модулю T_0 , т.е. взятие дробной части от числа $(t+mT)/T_0$, что соответствует вычитанию соответствующего количества целых п. периодов T_0 .)

Если же число T/T_0 рационально, то наблюдаем промежуточный случай по сравнению с двумя описанными выше, в котором $y_{ср}(t)$, как можно показать, приближается к периодической функции с периодом T = T_0/n при некотором натуральном n. Эта функция получена усреднением n последовательных участков длины T_0/n периодического сигнала x(t). Она не является константой, хотя разброс ее значений меньше, чем для исходного периодического сигнала, поскольку T_0 - минимальная длина периода.

Из сказанного вытекает, что для оценивания T целесообразно ввести два показателя: показатель разброса F(T; Y)=F(T; $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, ...) множества функций {$y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, ... } на отрезке [0; T] и показатель размаха G(T;Y)=G(T, $y_{ср}(t)$) функции $y_cp(t)$ на отрезке [0; T]. (Символ Y означает здесь, что показатели разброса и размаха строятся по функции y(t).) При этом показатель разброса нацелен на оценку различий в значениях семейства функций при одном и том же значении аргумента, а показатель размаха - на различие значений одной и той же функции при различных значениях аргумента. Ниже выписан ряд формул для этих показателей в случае непрерывного времени. Для дискретного времени их можно адаптировать двумя способами: либо заменив sup на max, а интеграл на сумму; либо расширив область определения используемых функций на весь отрезок, например, соединив соседние точки отрезками или использовав для заполнения пропусков сплайны более высокого порядка.

В качестве оценки длины периода по фиксированным показателям разброса F(T; Y) и размаха G(T;Y) представляется рациональным использовать то T, при котором отношение F(T; Y)/G(T; Y) впервые (при росте T начиная с 0) достигает минимума (впервые - поскольку величины, кратные периоду, сами являются периодами). Поскольку показатели разброса F(T; Y) и размаха G(T; Y) могут быть выбраны многими разными способами, можно указанным выше способом построить целое семейство алгоритмов оценивания длины периода, с каждым из которых может быть связано семейство методов оценивания периодической составляющей путем того или иного способа усреднения функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, ...

Алгоритмы оценивания. С прикладной точки зрения остается численно минимизировать один или несколько из 66 описанных выше функционалов Fi(T; Y)/Gj(T; Y), i = , 2 ,..., 11, j = 1, 2, ..., 6.

Численная минимизация по одному параметру (возможной длине периода) для современных ЭВМ не вызывает проблем, даже если попросту перебирать возможные значения периода с шагом 0,001. По нескольким реальным или смоделированным сигналам можно установить, какой из функционалов позволяет оценить период и периодическую составляющую реально встречающихся сигналов наиболее точно. Возможно и одновременное использование всех или части функционалов, что в соответствии с методологией устойчивости позволяет установить чувствительность оценок к выбору метода оценивания, найти интервал их разброса. Проведенные в Институте высоких статистических технологий и эконометрики расчеты по реальным и смоделированным данным о временных рядах показали, что описанные выше алгоритмы позволяют оценивать длину периода и восстанавливать периодическую составляющую временного ряда достаточно точно с практической точки зрения.

В обширной литературе по временным рядам проблеме оценивания периода не уделяется большого внимания. Фактически рекомендуют пользоваться либо периодограммой, либо автокорреляционной функцией. С помощью периодограммы (несостоятельной оценки спектральной плотности) можно выделить лишь синусоидальные составляющие, в то время как в кратко рассмотренных выше прикладных задачах периодическая составляющая представляет интерес сама по себе, без разложения на гармоники. Вторая рекомендация более полезна. В качестве оценки периода можно взять наименьшее положительное число, в котором достигается локальный максимум автокорреляционной функции. Эмпирический коэффициент автокорреляции - еще один функционал типа тех, что перечислены выше.

При поверхностном взгляде на проблемы статистического оценивания, как и на иные проблемы прикладной математики, часто возникает желание обсудить “оптимальность” тех или иных процедур. При более глубоком анализе становятся очевидными два обстоятельства. Во-первых, оптимальность имеет быть лишь в рамках той или иной теоретической модели, при отклонениях от которой оптимальность оценки, как правило, пропадает. Например, выборочное среднее арифметическое как оценка математического ожидания случайной величины оптимальна тогда и только тогда, когда распределение результатов наблюдений - гауссово. С другой стороны, для практически любой статистической процедуры можно подобрать свойство оптимальности так, чтобы эта процедура оказалась оптимальной (как подобрать - это уже дело профессионала). Так, например, метод наименьших модулей оптимален, если погрешности имеют распределение Лапласа, а метод наименьших квадратов - когда их распределение гауссово. Поскольку реальные распределения - не Лапласа и не Гаусса, то указанные математические результаты не могут иметь большого практического значения.

Замечание. При практическом использовании описанных в настоящем пункте алгоритмов целесообразно учитывать дополнительные особенности реальных временных рядов. В частности, обратим внимание на неустойчивость супремумов по отношению к выбросам (резко выделяющимся наблюдениям) сравнительно с функционалами интегрального типа. Бывают ситуации, когда методики или аппаратура, регистрирующие значения реальных временных рядов, могут допускать сбои в отдельные моменты времени. Например, если происходит валютный кризис типа "черного вторника", когда курс доллара по отношению к рублю, строго говоря, не определен, другими словами, с точки зрения экономических агентов одновременно существует масса сильно отличающихся курсов. Аналогичная ситуация бывает и в целом ряде других случаев. Набор подходящих ассоциаций вызывают решения руководства страны об обмене денежных знаков, особенно с дискриминационными составляющими. Во всех подобных ситуациях временные ряды дают резкие выбросы (всплески), которые затем, как правило, сглаживаются. Поэтому целесообразно в качестве показателей разброса и размаха использовать функционалы интегрального типа. Вопросам оценивания длины периода и периодической составляющей посвящены многие публикации.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные элементы временного ряда.
2. Дайте определение автокорреляции уровней и поясните, как она используется при моделировании динамического ряда.
3. Перечислите основные виды трендов
4. В чём отличие подходов к оцениванию сезонности в аддитивной и мультипликативной моделях?
5. Что такое модель с распределёнными лагами?
6. Как интерпретируются параметры модели с распределёнными лагами?
7. Для чего используются инструментальные переменные?
8. Что такое модели авторегрессии?
9. В каких случаях оценка параметров модели с распределёнными лагами может быть дана методом наименьших квадратов?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Баклушина, О. А**. Эконометрика : учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 2008
2. **Валеев С. Г.** Эконометрика: учебно-практическое пособие / С. Г. Валеев, С. В. Куркина. - Ульяновск: УлГТУ, 2008
3. **Валентинов В.А.** Эконометрика: практикум / В.А. Валентинов. - М.: «Дашков и К», 2008. - 436 с.
4. **Воскобойников, Ю. Е**. Эконометрика в Excel : учебное пособие. Ч. 2. - Новосибирск: НГАСУ, 2008
5. **Гладилин А.В.,** Эконометрика: учебное пособие /А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – 2-е изд., стер. – М .: КНОРУС, 2008. – 232 с.
6. **Доугерти К.** Введение в эконометрику: Учебник 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2007.- 432 с
7. **Кремер И.Ш.** Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. 2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-Дана, 2008. - 311 с.
8. **Тихомиров И.П.** Эконометрика: учебник /Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. -- 2-е изд., стереотип. -- М.: Изд-во «Экзамен», 2007. - 512 с.

Дополнительная

1. **Кашина И.А., Кашин В.К., Нечаев Д.Ю., Чекмарев Ю.В**. Информационно-правовые системы в экономической деятельности. - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
2. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В**. Информационные технологии в бизнесе. Практикум. М.: ФиС, 2008. -509 с.
3. **Арсеньев Ю.Н.** Информационные системы и технологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 447 с.
4. **Барановская Т.П. и др**. Информационные системы и технологии в экономике. М.: ФиС, 2007. - 412 с.

Лекция 7

СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

7.1. Виды эконометрических систем

Сложное социально-экономическое явление не всегда получается описать с помощью только одного уравнения. Кроме того, некоторые переменные могут оказывать взаимные воздействия и трудно однозначно определить, какая из них является зависимой, а какая независимой переменной. Поэтому при построении эконометрической модели прибегают к системам уравнений.

Системы эконометрических уравнений включают множество эндогенных (зависимых) переменных и множество предопределенных переменных, к которым относятся лаговые и текущие экзогенные переменные, а также лаговые эндогенные переменные. Все эконометрические модели предназначены для объяснения текущих значений эндогенных переменных по значениям предопределенных переменных.

Система уравнений в эконометрических исследованиях может быть построена по-разному. Выделяют три вида эконометрических систем:

Система независимых уравнений, когда каждая зависимая переменная **Y** рассматривается как функция только от предопределенных переменных **X.** Каждое уравнение системы независимых уравнений может использоваться самостоятельно, для нахождения его параметров используют МНК. В принципе каждое уравнение системы является независимым уравнением регрессии, поскольку никогда нет уверенности, что факторы, включаемые в уравнение регрессии, полностью объясняют результативный признак, то в каждом уравнении системы также присутствует случайная компонента. В итоге система независимых уравнений при 3-х зависимых переменных и 4-х факторах примет следующий вид:

$y_1=a_{01}+a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+a_{41}x_4+e_1$

$y_2=a_{02}+a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3+a_{42}x_4+e_2$

$y_3=a_{03}+a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3+a_{43}x_4+e_3$

Однако, если одна зависимая переменная У одного уравнения выступает в виде фактора Х в другом уравнении этой же системы, то можно построить модель, которая будет называться системой рекурсивных уравнений.

Система рекурсивных уравнений, когда в каждом последующем уравнении системы зависимая переменная представляет функцию от всех зависимых и предопределенных переменных предшествующих уравнений:

$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m+e_1$

$y_2=b_{21}y_1+a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m+e_2$

$y_3=b_{31}y_1+b_{32}y_2+a_{31}x_1+a_{32}x_2+\ldots+a_{3m}x_m+e_3$

…………………………………………….

$y_n=b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\ldots+b_{nn-1}y_{n-}+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m+e_n$

В этой системе зависимая переменная У включает в уравнение в качестве факторов все зависимые переменные предшествующих уравнений. Наряду с набором собственных факторов Х. Примером такой системы может служить модель производительности труда и фондоотдачи вида:

$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+e_1$

$y_2=b_{21}y_1+a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+e_2$

где y_1 – производительность труда,

y_2 – фондоотдача,

x_1 – фондовооруженность труда,

x_2 – энерговооруженность труда,

x_3 – квалификация рабочих.

Как и в предыдущей системе, каждое уравнение может использоваться самостоятельно и его параметры можно определить с помощью МНК.

Наибольшее распространение в эконометрических исследованиях получила система взаимозависимых уравнений.

Система взаимозависимых (совместных, одновременных) уравнений, когда зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть (т.е. выступают в роли признаков-результатов), а в других уравнениях – в правую часть системы (т.е. выступают в роли признаков-факторов). В общем виде система таких уравнений выглядит следующим образом:

$y_1=b_{12}y_2+b_{13}y_3+\ldots+b_{1n}y_n+a_{11}x_1+a_{12}x2+\ldots+a_{1m}x_m+e_1$

$y_2=b_{21}y_1+b_{23}y_3+\ldots+b_{2n}y_n+a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m+e_2$

……..……………………………………………

$y_n=b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\ldots+b_{nn-1}y_{n-1}+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m+e_n$

Система таких уравнений также называется системой совместных одновременных уравнений. Тем самым подчеркивается, что в системе одни и те же переменные одновременно используется как зависимые в одних и независимые в других уравнениях. В эконометрике такая система уравнений также называется структурной формой модели. В отличие от всех систем, система одновременных уравнений не может использоваться как отдельный набор уравнений, каждое из которых является уравнением регрессии и параметры которого могут быть определены с помощью традиционного МНК. Для нахождения параметров такой системы используются специальные приемы оценивания. Примером системы одновременных уравнений может служить система, отображающая модель в динамике цены и з/пл.

$y_1=b_{12}y_2+a_{11}x_1+e_1$

$y_2=b_{12}y_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+e_2$

где y_1 – темп изменения месячной з/пл, y_2 – темп изменения цен,

x_1 - % безработных,

x_2 – темп изменения постоянного капитала,

x_3 – темп изменения цен на импорт сырья,

Система одновременных уравнений обычно содержит эндогенные и экзогенные переменные.

Эндогенные переменные – обозначают в приведенной ранее структурной форме модели как У – зависимые переменные, число таких переменных равно числу уравнений в системе.

Экзогенные переменные были обозначены как Х – это предопределенные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но независящие от них. Простейшая структурная форма модели имеет следующий вид:

$y_1=b_{12}y_2+a_nx_1+e_1$

$y_2=b_{21}y_1+a_{22}x_2+e_2$

где y – эндогенные переменные, x – экзогенные переменные.

7.2. Структурная и приведенная формы модели

Классификация переменных на эндогенные и экзогенные зависят от теоретической концепции, принятой исследователем модели. Экономические показатели могут выступать в одних моделях как эндогенные, а в др., как экзогенные переменные. Климатические условия в эконометрических моделях всегда входят в систему как экзогенные переменные. В качестве экзогенных переменных также могут использоваться эндогенные переменные за предшествующий период времени. В этом случае они называются лаговыми переменными. Структурная форма модели позволяет увидеть влияние любой экзогенной переменной на значение эндогенной переменной. Целесообразно в качестве экзогенных переменных выбирать такие показатели, которые могут быть, объектом регулирования. Меняя их и управляя ими, можно заранее иметь наименьшие значения эндогенных переменных. Структурная форма модели в правой части содержит коэффициенты b_i и a_j, где b_i – коэффициенты при эндогенных переменных, a_j – коэффициенты при экзогенных переменных . Коэффициенты b_i и a_j называются структурными коэффициентами модели. Все переменные в модели выражены в отклонениях от среднего уровня, т.е. $x = x - x_{cp}$, $y = y - y_{cp}$, поэтому свободный член в каждом уравнении системы одновременных уравнений отсутствует.

Приведенными называют уравнения, полученные из структурных путем подстановки взамен эндогенной переменной в правую часть уравнения ее выражения из другого структурного уравнения, в котором эта эндогенная переменная находится в левой части. После такой подстановки производят преобразования, при которых члены уравнения, содержащие эндогенную переменную, переносят в левую часть, а в правой части остаются только экзогенные переменные. Приведенная форма модели выглядит следующим образом:

$y_1=\sigma_{11}x_1+\sigma_{12}x_2+\ldots+\sigma_{1m}x_m$

$y_2=\sigma_{21}x_1+\sigma_{22}x_2+\ldots+\sigma_{2m}x_m$

$y_n=\sigma_{n1}x_1+\sigma_{n2}x_2+\ldots+\sigma_{2m}x_m$

где σ_{ij} – коэффициенты приведенной формы модели

По своему виду приведенная форма модели ничем не отличается от системы независимых уравнений, параметры которой оцениваются с помощью обычного МНК. Применяя МНК, можно оценить коэффициенты уравнения регрессии, а затем и значения эндогенных переменных всей системы с помощью экзогенных. Коэффициенты приведенной формы модели представляют собой нелинейные функции от коэффициентов структурной формы модели. Рассмотреть такое положение очень просто на примере структурной модели с 2-мя уравнениями и 2-мя экзогенными переменными следующего вида:

$y_1=b_{12}y_2+a_{11}x_1$

$y_2=b_{21}y_1+a_{22}x_2$

Приведенная форма модели выглядит следующим образом:

$y_1=\sigma_{11}x_1+\sigma_{12}x_2$

$y_2=\sigma_{21}x_1+\sigma_{22}x_2$

Выразив эндогенную переменную y_2 из 1-го уравнения через y_1 и x $Y_2=(Y \ -a_{11}x_{11})/b_{12\,1}$ и решая получившуюся систему для Y_1, мы получим следующие формулы зависимости между коэффициентами структурной формы модели и приведенной формы модели:

Таким образом:

$$\sigma_{11}=\frac{a_{11}}{1-b_{12}b_{21}}; \quad \sigma_{12}=\frac{a_{22}b_{22}}{1-b_{12}b_{21}}$$

Проделав аналогичную замену для экзогенной переменной y_1 (выразим ее через y_2 и x_2 по 2-му уравнению структурной модели) $Y_1=(Y_2-a_{22}x_2)/b_{21}$ получим аналогичные формулы для коэффициентов приведенной модели для 2-го уравнения:

$$\sigma_{21}=\frac{a_{11}b_{21}}{1-b_{12}b_{21}}; \ \sigma_{22}=\frac{a_{22}}{1-b_{12}b_{21}}$$

Эконометрические модели обычно включают в систему не только уравнения, отражающие взаимосвязи между отдельными переменными, но и выражения, соответствующие тенденции развития процесса, а также различного вида тождества. Например, в линейной зависимости потребления от дохода можно одновременно использовать тождества дохода. Эта модель одна из первых моделей такого вида и была создана в 40-х годах XX века.

$y=a+by$

$y=c+x$

где x – инвестиции в основной капитал и в запасы экспорта и импорта, c – потребление, y – доход, a и b – параметры линейной зависимости потребления от дохода.

Оценки параметров такой модели должны учитывать тождество дохода в отличие от параметров обычной линейной регрессии. Эта модель также переводится в приведенную форму модели, а затем решается. Приведенная форма модели позволяет получить значения эндогенных переменных через экзогенные, но аналитически уступает структурной форме модели, т.к. в ней отсутствуют оценки взаимосвязи между эндогенными переменными.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте описание системы эконометрических уравнений в общем виде.
2. Назовите основные виды систем эконометрических уравнений.
3. Натуральная и стандартизованная форма модели
4. Оценка значимости модели множественной регрессии и её параметров
5. Изучение тесноты связи на основе моделей множественной регрессии
6. Модели регрессии с фиктивными переменными
7. Модели бинарного выбора
8. Специфика изучения взаимосвязей по рядам динамики
9. Основные экономические модели систем эконометрических уравнений

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Баклушина, О. А.** Эконометрика : учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 2008
2. **Валеев С. Г.** Эконометрика: учебно-практическое пособие / С. Г. Валеев, С. В. Куркина. - Ульяновск: УлГТУ, 2008
3. **Валентинов В.А**. Эконометрика: практикум / В.А. Валентинов. - М.: «Дашков и К», 2008. - 436 с.
4. **Воскобойников, Ю. Е**. Эконометрика в Excel : учебное пособие. Ч. 2. - Новосибирск: НГАСУ, 2008
5. **Гладилин А.В.,** Эконометрика: учебное пособие /А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – 2-е изд., стер. – М .: КНОРУС, 2008. – 232 с.
6. **Доугерти К.** Введение в эконометрику: Учебник 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2007.- 432 с
7. **Кремер И.Ш.** Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. 2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-Дана, 2008. - 311 с.
8. **Тихомиров И.П.** Эконометрика: учебник /Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. -- 2-е изд., стереотип. -- М.: Изд-во «Экзамен», 2007. - 512 с.

Дополнительная

1. **Кашина И.А., Кашин В.К., Нечаев Д.Ю., Чекмарев Ю.В**. Информационно-правовые системы в экономической деятельности. - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
2. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В**. Информационные технологии в бизнесе. Практикум. М.: ФиС, 2008. -509 с.
3. **Арсеньев Ю.Н.** Информационные системы и технологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 447 с.
4. **Барановская Т.П. и др**. Информационные системы и технологии в экономике. М.: ФиС, 2007. - 412 с.

Лекция 8

ПРОБЛЕМА ИДЕНТИФИКАЦИИ

8.1. Классификация структурных моделей

При переходе от приведенной формы к структурной сталкиваются с проблемой идентификации, т.е. соответствия параметров между приведенной и структурной формы. С этой позиции структурные модели делятся на идентифицируемые, неидентифицируемые и сверхидентифицируемые.

Модель идентифицируема, если все её структурные коэффициенты однозначно определяются по коэффициентам приведенной формы. В этом случае число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной модели.

Модель неидентифицируема, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов.

Модель сверхидентифицируема, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных.

Под идентификацией моделей обычно понимают выявление их структуры и оценивание параметров. Поскольку структура - это тоже параметр, хотя и нечисловой, то речь идет об одной из типовых задач эконометрики - оценивании параметров.

Проще всего задача оценивания решается для линейных (по параметрам) моделей с гомоскедастичными независимыми остатками. Восстановление зависимостей во временных рядах может быть проведено на основе методов наименьших квадратов и наименьших модулей, рассмотренных выше моделей линейной (по параметрам) регрессии. На случай временных рядов переносятся результаты, связанные с оцениванием необходимого набора регрессоров, в частности, легко получить предельное геометрическое распределение оценки степени тригонометрического полинома.

Однако на более общую ситуацию такого простого переноса сделать нельзя. Так, например, в случае временного ряда с гетероскедастичными и автокоррелированными остатками снова можно воспользоваться общим подходом метода наименьших квадратов, однако система уравнений метода наименьших квадратов и, естественно, ее решение будут иными. Формулы в терминах матричной алгебры, о которых упоминалось выше, будут отличаться. Поэтому рассматриваемый метод называется "обобщенный метод наименьших квадратов".

Замечание. Как уже отмечалось, простейшая модель метода наименьших квадратов допускает весьма далекие обобщения, особенно в области систем одновременных эконометрических уравнений для временных рядов. Для понимания соответствующей теории и алгоритмов необходимо профессиональное владение матричной алгеброй.

8.2. Обобщенный метод наименьших квадратов

Обобщенный метод наименьших квадратов рекомендуется применять при нарушении гомоскедастичности (то есть, при нарушении третьей предпосылки нормальной линейной регрессионной модели, когда случайные составляющие не имеют постоянной дисперсии). Им заменяют традиционный метод наименьших квадратов, который в этом случае не позволяет получить достаточно точные оценки параметров регрессии.

Обобщенный метод наименьших квадратов применяется к преобразованным данным и позволяет получать оценки, имеющие меньшие выборочные дисперсии.

Как и раньше, будем предполагать, что среднее значение остаточных величин равно нулю, но их дисперсия не остается постоянной для различных значений фактора, а пропорциональна величине K_i:

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma^2 \cdot K_i,$$

где $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ – дисперсия ошибки при конкретном значении фактора для наблюдения i; σ^2 – постоянная дисперсия ошибки при соблюдении предпосылки о гомоскедастичности остатков; K_i – коэффициент пропорциональности, меняющийся с изменением величины фактора, что и обуславливает неоднородность дисперсии.

Обычно в этом случае предполагается, что σ^2 не известна, а в отношении величины К выдвигаются различные предположения, характеризующие структуру гетероскедастичности.

В общем виде для уравнения $y_i = a + b \cdot x_i + \varepsilon_i$ модель примет вид:

$$y_i = a + \beta_i \cdot x_i + \sqrt{K_i} \cdot \varepsilon_i.$$

В этой модели остаточные величины гетероскедастичны, но от них можно перейти к уравнению с гомоскедастичными остатками, поделив все переменные на $\sqrt{K_i}$. Тогда дисперсия остатков будет постоянной величиной.

Получается, что от регрессии y по x мы перейдем к регрессии для преобразованных переменных $\frac{y}{\sqrt{K}}$ и $\frac{x}{\sqrt{K}}$. И уравнение регрессии принимает следующий вид:

$$\frac{y_i}{\sqrt{K_i}} = \frac{a}{\sqrt{K_i}} + \beta_i \cdot \frac{x_i}{\sqrt{K_i}} + \varepsilon_i.$$

Исходные данные для этого уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$y = \begin{vmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{K_1}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{K_2}} \\ \cdots \\ \frac{y_n}{\sqrt{K_n}} \end{vmatrix}, \qquad x = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{K_1}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{K_2}} \\ \cdots \\ \frac{x_n}{\sqrt{K_n}} \end{vmatrix}.$$

Оценка параметров нового уравнения с новыми преобразованными переменными приводит к взвешенному методу наименьших квадратов (поскольку это будет взвешенная регрессия, в которой переменные x и y взяты с весами $\frac{1}{\sqrt{K_i}}$), для которого необходимо минимизировать следующую сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum \frac{1}{K_i} \cdot (y_i - a - b_i \cdot x_i)^2 \to \min.$$

Дифференцируя это выражение, получаем следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum \frac{y_i}{K_i} = a + \sum \frac{1}{K_i} + b \cdot \sum \frac{x_i}{K_i} \\ \sum \frac{y_i \cdot x_i}{K_i} = a + \sum \frac{x_i}{K_i} + b \cdot \sum \frac{x_i^2}{K_i} \end{cases}.$$

Если преобразованные переменные x и y взять в отклонениях от средних уровней, то коэффициент регрессии b можно определить как

$$b = \frac{\sum \frac{1}{K} \cdot x \cdot y}{\sum \frac{1}{K} \cdot x^2}.$$

При обычном применении метода наименьших квадратов к уравнению линейной регрессии для переменных в отклонениях от средних уровней коэффициент b определяется по формуле:

$$b = \frac{\sum x \cdot y}{\sum x^2}.$$

Аналогичный подход будет использоваться и для множественной регрессии, предположим, что рассматривается модель вида

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p + \varepsilon.$$

Для этой модели дисперсия остаточных величин пропорциональна K_i^2. K_i – представляет собой коэффициент пропорциональности, принимающий различные значения для соответствующих значений факторов для наблюдения i. Рассматриваемая модель примет вид

$$y_i = a + b_1 \cdot x_{1i} + b_2 \cdot x_{2i} + \ldots + b_p \cdot x_{p_i} + \varepsilon_i.$$

Чтобы получить уравнение, где остатки гомоскедастичны, перейдем к новым преобразованным переменным, разделив все члены исходного уравнения на коэффициент пропорциональности K. Оно будет выгдядеть следующим образом:

$$\frac{y_i}{K_i} = \frac{a}{K_i} + b_1 \cdot \frac{x_{1_i}}{K_i} + b_2 \cdot \frac{x_{2_i}}{K_i} + \ldots b_p \cdot \frac{x_{p_i}}{K_i} + \varepsilon_i.$$

Это уравнение не содержит свободного члена. Однако, найдя переменные в преобразованном виде и применяя к ним традиционный метод наименьших квадратов, получим иную спецификацию модели:

$$\frac{y_i}{K_i} = A + b_1 \cdot \frac{x_{1i}}{K_i} + b_2 \cdot \frac{x_{2i}}{K_i} + \ldots b_p \cdot \frac{x_{pi}}{K_i} + \varepsilon_i.$$

В эконометрических исследованиях часто выдвигается гипотеза, что остатки ε_i пропорциональны значениям фактора. Так, если в уравнении

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p + E$$

предположить, что $E = \varepsilon \cdot x_1$, то есть $K = x_1$, то обобщенный МНК предполагает, что оцениваться будет следующее уравнение:

$$\frac{y}{x_1} = b_1 + b_2 \cdot \frac{x_2}{x_1} + \ldots b_p \cdot \frac{x_p}{x_1} + \varepsilon.$$

Если предположить, что ошибки пропорциональны x_p, то наша модель примет несколько иной вид:

$$\frac{y}{x_1} = b_p + b_1 \cdot \frac{x_1}{x_p} + \ldots b_{p-1} \cdot \frac{x_{p-1}}{x_p} + \varepsilon.$$

Применение в этом случае обобщенного МНК приводит к тому, что наблюдения с меньшими значениями преобразованных переменных имеют при определении параметров регрессии относительно больший вес, чем по сравнению с первоначальными переменными. Вместе с тем следует иметь в виду, что новые преобразованные переменные получают новое экономическое содержание и их регрессия имеет иной смысл, нежели регрессия по исходным данным.

Переход к относительным величинам существенно снижает вариацию фактора и соответственно уменьшает дисперсию ошибки. Он представляет наиболее простой случай учета гетероскедастичности в регрессионных моделях с помощью обобщенного МНК. Применение обобщенного МНК позволяет получить оценки параметров модели, обладающие меньшей дисперсией.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют структурной формой модели?
2. Что понимают под идентификацией структурной модели?
3. Каким способом оцениваются параметры одновременных уравнений?
4. Для чего необходима приведённая форма модели. Какой вид она имеет?
5. Как строится структурная модель спроса и предложения?
6. Какие типы переменных принято выделять в системах эконометрических уравнений?
7. Поясните, почему нельзя использовать МНК для нахождения параметров системы одновременных уравнений?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Баклушина, О. А.** Эконометрика : учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 2008
2. **Валеев С. Г.** Эконометрика: учебно-практическое пособие / С. Г. Валеев, С. В. Куркина. - Ульяновск: УлГТУ, 2008
3. **Валентинов В.А.** Эконометрика: практикум / В.А. Валентинов. - М.: «Дашков и К», 2008. - 436 с.
4. **Воскобойников, Ю. Е.** Эконометрика в Excel : учебное пособие. Ч. 2. - Новосибирск: НГАСУ, 2008
5. **Гладилин А.В.,** Эконометрика: учебное пособие /А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – 2-е изд., стер. – М .: КНОРУС, 2008. – 232 с.
6. **Доугерти К.** Введение в эконометрику: Учебник 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2007.- 432 с
7. **Кремер И.Ш.** Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. 2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-Дана, 2008. - 311 с.
8. **Тихомиров И.П.** Эконометрика: учебник /Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. -- 2-е изд., стереотип. -- М.: Изд-во «Экзамен», 2007. - 512 с.

Дополнительная

1. **Кашина И.А., Кашин В.К., Нечаев Д.Ю., Чекмарев Ю.В**. Информационно-правовые системы в экономической деятельности. - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
2. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В.** Информационные технологии в бизнесе. Практикум. М.: ФиС, 2008. -509 с.
3. **Арсеньев Ю.Н.** Информационные системы и технологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 447 с.
4. **Барановская Т.П. и др**. Информационные системы и технологии в экономике. М.: ФиС, 2007. - 412 с.

Лекция 9

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

9.1. Вводные замечания

Одним из необходимых условий дальнейшего развития экономической науки является применение точных методов количественного анализа, широкое использование математики и компьютерного моделирования. В настоящее время новейшие достижения математики и современной вычислительной техники находят все более широкое применение в экономических исследованиях и планировании. Этому способствует развитие таких разделов математики, как математическое программирование, теория игр, теория массового обслуживания, а также бурное развитие быстродействующей электронно-вычислительной техники. Уже накоплен достаточный опыт постановки и решения экономических задач с помощью математических методов. Особенно успешно развиваются методы оптимального планирования, которые и составляют сущность математического программирования.

Значительное число задач, возникающих в обществе, связано с управляемыми явлениями, т.е. с явлениями, регулируемыми на основе сознательно принимаемых решений. При ограниченном объеме информации, который был доступен на ранних этапах развития общества, принималось оптимальное в некотором смысле решение на основании интуиции и опыта, а затем, с возрастанием объема информации об изучаемом явлении, - с помощью ряда прямых расчетов. Так происходило, например, создание календарных планов работы промышленных предприятий.

Совершенно иная картина возникает на современном промышленном предприятии с многосерийным и многономенклатурным производством, когда объем входной информации столь велик, что его обработка с целью принятия определенного решения невозможна без применения компьютеров. Еще большие трудности возникают в связи с задачей о принятии наилучшего решения. Проблема принятия решений в исследовании операций неразрывно связана с процессом моделирования.

Первый этап процесса моделирования состоит в построении качественной модели. Второй этап - построение математической модели рассматриваемой проблемы. Этот этап включает также построение целевой функции, т. е. такой числовой характеристики, большему (или меньшему) значению которой соответствует лучшая ситуация с точки зрения принимающего решения. В результате этих двух этапов формируется соответствующая математическая задача.

Третий этап - исследование влияния переменных на значение целевой функции. Этот этап предусматривает владение математическим аппаратом для решения математических задач, возникающих на втором этапе процесса принятия решения.

Четвертый этап - сопоставление результатов вычислений, полученных на третьем этапе, с моделируемым объектом, т. е. экспертная проверка результатов (критерий практики). Таким образом, на этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации.

Широкий класс задач управления составляют такие экстремальные задачи, в математических моделях которых условия на переменные задаются равенствами и неравенствами. Теория и методы решения этих задач как раз и составляют содержание математического программирования.

9.2. Линейное математическое программирование

В настоящее время линейное программирование является одним из наиболее употребительных аппаратов математической теории оптимального принятия решений. Для решения задач линейного программирования разработано сложное программное обеспечение, дающее возможность эффективно и надежно решать практические задачи больших объемов. Владение аппаратом линейного программирования необходимо каждому специалисту в области прикладной математики.

Линейное программирование – это наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Таким образом, задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции. По типу решаемых задач методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи линейного программирования (ЗЛП). Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда — необходимость разработки новых методов.

Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации. К числу задач линейного программирования можно отнести задачи:

1. рационального использования сырья и материалов;
2. задачи оптимального раскроя;
3. оптимизации производственной программы предприятий;
4. оптимального размещения и концентрации производства;
5. составления оптимального плана перевозок, работы транспорта (транспортные задачи);
6. управления производственными запасами;
7. многие другие, принадлежащие сфере оптимального планирования.

Линейное программирование является одной из основных частей раздела современной математики, который получил название математического программирования. В общей постановке, задачи этого раздела выглядят следующим образом.

Требуется найти такие неотрицательные X_1, X_2, X_3, …, X_N, которые обеспечивают максимум или минимум целевой функции (формула 7.1), которые удовлетворяют системе ограничений (формула 7.2) и не противоречат условиям неотрицательности:

$$F(X) = C_1X_1 + C_1X_2 + C_1X_3 + \ldots + C_1X_{1N} \qquad (9.1)$$

$$\begin{array}{l} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + \ldots + A_{1N}X_1 \ \ \{<=>\} \ B_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + \ldots + A_{2N}X_1 \ \ \{<=>\} \ B_2 \\ A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + \ldots + A_{1N}X_1 \ \ \{<=>\} \ B_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{M1}X_1 + A_{M2}X_2 + A_{M3}X_3 + \ldots + A_{MN}X_1 \ \{<=>\} \ B_M \end{array} \qquad (9.2)$$

В зависимости от вида функции различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, целочисленное программирование и т.д. Линейное программирование характеризуется тем, что функция является линейной функцией переменных .

Задачу на минимум можно решать как задачу на максимум. Достаточно знаки целевой функции поменять на противоположные.

Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего экстремума (минимума или максимума) в вершине допустимой области. Если целевая функция достигает экстремального значения более чем на одной вершине, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин (альтернативный оптимум).

Эта теорема имеет важнейшие значение, так как она указывает путь решения задачи линейного программирования. Совсем не надо перебирать все точки допустимой области. Достаточно перебрать вершины допустимой области, а ведь их конечное число. Кроме того, не нужно перебирать все вершины, можно этот перебор существенно сократить.

Любой набор чисел, удовлетворяющий ограничениям задачи, называют планом, а множество всех планов допустимой областью. Тот план, который доставляет экстремум (минимум или максимум) целевой функции, называют оптимальным планом или просто решением задачи линейного программирования.

9.3. Методы решения задач линейного программирования

Задачи линейного программирования решаются несколькими методами:

1. графический метод;
2. симплексный метод;
3. двойственность в ЛП;
4. двойственный симплексный метод.

Задачи линейного программирования с двумя переменными всегда можно решить графически. Однако уже в трехмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространствах, размерность которых больше трех, графическое решение невозможно.

Графический метод довольно прост и нагляден. Он основан на геометрическом представлении допустимых решений задачи. Каждое из неравенств задачи ЛП определяет на координатной плоскости некоторую полуплоскость, а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется областью допустимых решений (ОДР). ОДР всегда представляет собой выпуклую фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки A и B принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок AB принадлежит ей. ОДР графически может быть представлен выпуклым многоугольником, неограниченным выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучом и т.д. В случае несовместности системы ограничений задачи ОДР является пустым множеством.

При поиске оптимального решения задач линейного программирования возможны следующие ситуации: существует единственное решение задачи, существует бесконечное множество решений (альтернативный оптимум); ЦФ не ограничена; область допустимых решений– единственная точка; задача не имеет решений.

Любая задача линейного программирования, независимо от вида записи, может быть приведена к стандартной и канонической форме и решена симплексным методом, который в определенном смысле является универсальным методом ЛП. Алгоритм симплекс-метода носит итерационный характер.

Симплекс-метод позволяет переходить от одного допустимого базисного решения к другому, причем так, что значения целевой функции непрерывно возрастают. Алгоритмы симплекс-метода позволяют также установить, является ли задача ЛП разрешимой.

Переход от одного базиса к другому позволяет находить решения почти всех задач ЛП. Определив все крайние точки, можно вычислить значения целевой функции и найти оптимальное решение. Однако для больших значений m и n это практически невозможно.

Алгоритм решения задачи ЛП табличным симплексом-методом состоит из следующих этапов:

1. рассчитывают и заполняют начальную симплекс-таблицу с допустимым единичным базисом, включая индексную строку.
2. находят разрешающий столбец;
3. находят разрешающую строку;
4. рассчитывают методом Жордано-Гаусса все параметры матрицы;
5. анализируют полученные данные в индексной строке.

Таблицы симплекс-метода необходимо строить до тех пор, пока не будет получен оптимальный план. План будет считаться оптимальным, если в последней индексной строке симплекс-таблицы будут только нули и положительные числа.

При построении симплексного метода предполагалось, что все опорные планы невырожденные, что обеспечивало получение оптимального плана за конечное количество шагов. В случае вырожденного плана вычисления производят аналогично, но в этом случае возможен возврат к старому базису, что приводи к так называемому зацикливанию.

Метод искусственного базиса применяется при наличии в ограничении знаков “равно”, “больше либо равно”, “меньше либо равно” и является модификацией табличного метода. Решение системы производится путём ввода искусственных переменных со знаком, зависящим от типа оптимума, т.е. для исключения из базиса этих переменных последние вводятся в целевую функцию с большими отрицательными коэффициентами m, а в задачи минимизации - с положительными m. Таким образом, из исходной получается новая m - задача.

Если в оптимальном решении m - задачи нет искусственных переменных, это решение есть оптимальное решение исходной задачи. Если же в оптимальном решении m - задачи хоть одна из искусственных переменных будет отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна и исходная задача неразрешима.

В основу модифицированного симплекс – метода положены такие особенности линейной алгебры, которые позволяют в ходе решения задачи работать с частью матрицы ограничений. Иногда метод называют методом обратной матрицы.

В процессе работы алгоритма происходит спонтанное обращение матрицы ограничений по частям, соответствующим текущим базисным векторам. Указанная способность делает весьма привлекательной машинную реализацию вычислений вследствие экономии памяти под промежуточные переменные и значительного сокращения времени счёта. Метод эффективен для ситуаций, когда число переменных n значительно превышает число ограничений m.

В целом, метод отражает традиционные черты общего подхода к решению задач линейного программирования, включающего в себя канонизацию условий задачи, расчёт симплекс-разностей, проверку условий оптимальности, принятие решений о коррекции базиса и исключение Жордана-Гаусса.

Особенности заключаются в наличии двух таблиц - основной и вспомогательной, порядке их заполнения и некоторой специфичности расчётных формул.

9.4. Двойственная задача линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу, называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой задаче. Сопоставляя формы записи прямой и двойственной задач, можно установить между ними следующие взаимосвязи:

1. если прямая задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации, и наоборот;

2. коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами ограничений двойственной задачи;

3. свободные члены ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи;

4. матрица ограничений двойственной задачи получается путем транспортирования матрицы ограничений прямой задачи;

5. знаки неравенств в ограничениях изменяются на противоположные;

6. число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи, и наоборот.

Если из пары двойственных задач одна обладает оптимальным планом, то и другая имеет решение, причем для экстремальных значений линейных функций выполняется определенное соотношение. Если линейная функция одной из задач не ограничена, то другая не имеет решения.

Если прямая (а значит, и двойственная) задача разрешима, то в каждой паре двойственных условий одно является свободным, а другое закрепленным. Любое из условий называется свободным, если оно выполняется как строгое неравенство хотябы для одного оптимального вектора. Условие называется закрепленным, если оно выполняется как равенство для всех оптимальных векторов.

Двойственную задачу выгоднее решать, чем прямую, если в прямой задаче при малом количестве переменных имеется большое количество ограничений.

9.5. Двойственный симплекс-метод

Симплексный метод позволяет наряду с получением решения прямой задачи получать и решение двойственной задачи. Этот результат и лежит в основе двойственного симплексного метода решения задачи. Суть метода состоит в таком последовательном переборе угловых точек допустимого множества Q_0 двойственной задачи, при котором значение целевой функции возрастает, т. е. в применении симплексного метода к решению двойственной задачи. Будем предполагать, что задача невырождена, т. е. каждой угловой точке множества Q_0 соответствует квадратная невырожденная система уравнений размерности m, матрицу которую и называют двойственным базисом прямой задачи. Вместе с тем двойственный симплекс–метод можно применять при решении задачи линейного программирования, свободные члены системы уравнений которой могут быть любыми числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагались неотрицательными).

Отыскание решения задачи двойственным симплекс-методом включает в себя следующие этапы:

1. Находят псевдоплан задачи.

2. Проверяют этот псевдоплан на оптимальность. Если псевдоплан оптимален, то найдено решение задачи. В противном случае либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому псевдоплану.

3. Выбирают разрешающую строку с помощью определения наибольшего по абсолютной величине отрицательного числа столбца вектора P_0 и разрешающий столбец с помощью нахождения наименьшего по абсолютной величине отношения элементов (m+1)–и строки к соответствующим отрицательным элементам разрешающей строки.

4. Находят новый псевдоплан и повторяют все действия начиная со второго этапа.

Двойственный симплексный метод называют также методом последовательного уточнения оценок, поскольку угловые точки задачи, возникающие при итерациях, можно рассматривать как приближенные значения точной оценки y*, т. е. как приближенные оценки влияния условий задачи на величину минимума целевой функции.

9.6. Целочисленное математическое программирование

Значительная часть экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции, например распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов, загрузка оборудования, распределение судов по линиям, самолетов по рейсам, а также задачи по производству неделимой продукции. Если единица составляет малую часть всего объема производства, то оптимальное решение находят обычным симплексным методом, округляя его до целых единиц, исходя из смысла задачи. В противном случае округление может привести к решению, далекому от оптимального целочисленного решения.

Задача целочисленного программирования формулируется так же, как и задача линейного программирования, но включается дополнительное требование, состоящее в том, что значения переменных, составляющих оптимальное решение, должны быть целыми неотрицательными числами.

Метод решения таких задач, предложенный Гомори, основан на симплексном методе и состоит в следующем. Симплексным методом находится оптимальный план задачи без учета условия целочисленности. Если оптимальный план целочисленный, то вычисления заканчивают; если же оптимальный план содержит хотя бы одну дробную компоненту Xi, то накладывают дополнительное ограничение, учитывающее целочисленность компонент плана, и вычисления симплексным методом продолжают до тех пор, пока либо будет найден целочисленный оптимальный план, либо доказано, что задача не имеет целочисленных оптимальных планов.

Особенно широкое распространение линейное программирование получило в экономике, так как исследование зависимостей между величинами, встречающимися во многих экономических задачах, приводит к линейной функции с линейными ограничениями, наложенными на неизвестные.

9.7. Области применения линейного программирования для решения экономических и коммерческих задач

Особенно широкое применение методы и модели линейного программирования получили при решении задач экономии ресурсов (выбор ресурсосберегающих технологий, составление смесей, раскрой материалов, производственно-транспортных и других задач).

Рассмотрим постановку задачи о наилучшем использовании ресурсов. Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, объединение и т. д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов, может выпускать n различных видов продукции (товаров), известных под номерами, обозначаемыми индексом j . Товары будем обозначать . Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, других производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т. д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют ингредиентами. Пусть их число равно m; припишем им индекс i . Они ограничены, и их количества равны соответственно условных единиц. Таким образом, - вектор ресурсов. Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпускной цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребностей и т. д. Примем в качестве такой меры, например, цену реализации, т. е. — вектор цен. Известны также технологические коэффициенты , которые указывают, сколько единиц i–го ресурса требуется для производства единицы продукции j-го вида. Матрицу коэффициентов называют технологической и обозначают буквой A. Имеем . Обозначим через план производства, показывающий, какие виды товаров нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах. Так как - цена реализации единицы j-й продукции, цена реализованных единиц будет равна , а общий объем реализации примет вид. Это — целевая функция, которую нужно максимизировать.

Так как - расход i-го ресурса на производство единиц j-й продукции, то, просуммировав расход i-го ресурса на выпуск всех n видов продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосходить единиц.

Чтобы искомый план был реализован, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объёмы выпуска продукции.

В модель задачи о наилучшем использовании ресурсов входят: целевая функция, система ограничений и условия неотрицательности

Так как переменные входят в функцию и систему ограничений только в первой степени, а показатели являются постоянными в планируемый период, то это – задача линейного программирования.

В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д.. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигает на первый план следующую задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму. Более сложные постановки ведут к задачам целочисленного программирования.

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления в n пунктов назначения . При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через – запасы груза в i-м пункте отправления, через – потребности в грузе в j–м пункте назначения, а через – количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Тогда математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения целевой функции при определенных ограничениях и условиях неотрицательности.

Таким образом, обеспечивается доставка необходимого количества груза в каждый из пунктов назначения, вывоз имеющегося груза из всех пунктов отправления, а также исключаются обратные перевозки. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений называется планом транспортной задачи. План, при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности n+m–1, то план является невырожденным, а если меньше – то вырожденным.

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, то модель такой транспортной задачи называется закрытой. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется открытой.

В случае превышения запаса над потребностью, вводится фиктивный (n+1)–й пункт назначения с потребностью и соответствующие тарифы считаются равными нулю. Аналогично, в случае, если потребности превышают количество запасов, также вводится фиктивный (m+1)–й пункт отправления с запасом груза и тарифы полагаются равными нулю. Этим задача сводится к обычной транспортной задаче, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи.

9.8. Методы построения опорных планов

Как и для всякой задачи линейного программирования, оптимальный план транспортной задачи является и опорным планом. Опорный план является допустимым решением ТЗ и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов. Существует четыре метода нахождения опорных планов:

1. метод северо-западного угла;
2. метод минимального элемента;
3. метод двойного предпочтения;
4. метод штрафов (Фогеля).

"Качество" опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла– наихудшее.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только способом выбора клетки для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода. Следует помнить, что перед нахождением опорного плана транспортная задача должна быть сбалансирована.

В методе северо-западного угла из всех не вычеркнутых клеток выбирается самая левая и верхняя (северо-западная) клетка. Другими словами, на каждом шаге выбирается первая из оставшихся не вычеркнутых строк и первый из оставшихся не вычеркнутых столбцов.

Для того чтобы заполнить клетку (i,j), необходимо сравнить текущий запас товара в рассматриваемой i-й строке с текущей потребностью в рассматриваемом j-м столбце. Нахождение опорного плана продолжается до тех пор, пока не будут вычеркнуты все строки и столбцы.

В методе минимального элемента первой клеткой выбирают клетку с наименьшей суммой доставки и заполняют ее максимально возможным грузом.

Если таблица стоимостей велика, то перебор всех элементов затруднителен. В этом случае используют метод двойного предпочтения, суть которого заключается в следующем: в каждой строке и каждом столбце отмечают «V» наименьшую стоимость, а затем клетки с двойным символом «VV» заполняют с учетом наименьшей стоимости. Затем распределяют перевозки по клеткам, отмеченным знаком «V». В оставшейся части таблицы перевозки распределяют по наименьшей стоимости.

На каждом шаге метода Фогеля для каждой i-й строки вычисляются штрафы, как разность между двумя наименьшими тарифами строки. Таким же образом вычисляются штрафы для каждого j-го столбца. После чего выбирается максимальный штраф из всех штрафов строк и столбцов. В строке или столбце, соответствующем выбранному штрафу, для заполнения выбирается не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом. Если существует несколько одинаковых по величине максимальных штрафов в матрице, то в соответствующих строках или столбцах выбирается одна не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом.

Если клеток с минимальным тарифом также несколько, то из них выбирается клетка (i,j) с максимальным суммарным штрафом, т.е. суммой штрафов по i-й строке и j-му столбцу.

Если план транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из m+n чисел U_i и V_j, удовлетворяющих условиям: $U_i+V_j=C_{ij}$ для занятых клеток и $U_i+V_j\leq C_{ij}$ в свободных клетках. Числа U_i и V_j называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей. При решении одному неизвестному потенциалу придается произвольное значение.

Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий), например, при решении проблем управления и планирования производственных процессов, в проектировании и перспективном планировании, в военном деле и т.д.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение линейного программирования и моделирования.
2. Охарактеризуйте основные этапы разработки модели и раскройте их содержание.
3. Покажите на примере модели производственной структуры основные приёмы моделирования.
4. Дайте определение переменной, ограничения, технико-экономического коэффициента, константы. Объясните правила их соразмерности.
5. В чем цель транспортной задачи.
6. Какие виды задач вы знаете?
7. Дайте определение открытой и закрытой транспортной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Баклушина, О. А.** Эконометрика : учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 2008
2. **Валеев С. Г.** Эконометрика: учебно-практическое пособие / С. Г. Валеев, С. В. Куркина. - Ульяновск: УлГТУ, 2008
3. **Валентинов В.А.** Эконометрика: практикум / В.А. Валентинов. - М.: «Дашков и К», 2008. - 436 с.
4. **Воскобойников, Ю. Е.** Эконометрика в Excel : учебное пособие. Ч. 2. - Новосибирск: НГАСУ, 2008
5. **Гладилин А.В.,** Эконометрика: учебное пособие /А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – 2-е изд., стер. – М .: КНОРУС, 2008. – 232 с.
6. **Доугерти К.** Введение в эконометрику: Учебник 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2007.- 432 с
7. **Кремер И.Ш.** Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. 2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-Дана, 2008. - 311 с.
8. **Тихомиров И.П.** Эконометрика: учебник /Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. -- 2-е изд., стереотип. -- М.: Изд-во «Экзамен», 2007. - 512 с.

Дополнительная

1. **Кашина И.А., Кашин В.К., Нечаев Д.Ю., Чекмарев Ю.В.** Информационно-правовые системы в экономической деятельности. - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
2. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В.** Информационные технологии в бизнесе. Практикум. М.: ФиС, 2008. -509 с.
3. **Арсеньев Ю.Н.** Информационные системы и технологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 447 с.
4. **Барановская Т.П. и др.** Информационные системы и технологии в экономике. М.: ФиС, 2007. - 412 с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Баклушина, О. А**. Эконометрика : учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 2008
2. **Валеев С. Г.** Эконометрика: учебно-практическое пособие / С. Г. Валеев, С. В. Куркина. - Ульяновск: УлГТУ, 2008
3. **Валентинов В.А.** Эконометрика: практикум / В.А. Валентинов. - М.: «Дашков и К», 2008. - 436 с.
4. **Воскобойников, Ю. Е.** Эконометрика в Excel : учебное пособие. Ч. 2. - Новосибирск: НГАСУ, 2008
5. **Гладилин А.В.,** Эконометрика: учебное пособие /А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – 2-е изд., стер. – М .: КНОРУС, 2008. – 232 с.
6. **Доугерти К.** Введение в эконометрику: Учебник 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2007.- 432 с
7. **Кремер И.Ш.** Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. 2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-Дана, 2008. - 311 с.
8. **Тихомиров И.П.** Эконометрика: учебник /Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. -- 2-е изд., стереотип. -- М.: Изд-во «Экзамен», 2007. - 512 с.
9. **Кашина И.А., Кашин В.К., Нечаев Д.Ю., Чекмарев Ю.В.** Информационно-правовые системы в экономической деятельности. - М.: ДМК-ПРЕСС, 2008.
10. **Лихтеншейн В.Е., Росс Г.В.** Информационные технологии в бизнесе. Практикум. М.: ФиС, 2008. -509 с.
11. **Арсеньев Ю.Н.** Информационные системы и технологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 447 с.
12. **Барановская Т.П. и др**. Информационные системы и технологии в экономике. М.: ФиС, 2007. - 412 с.

Критические точки распределения Фишера-Снедекера, при α=0,05

К2 - степени свободы для меньшей (внутри-групповой) дисперсии	К1 - степени свободы для большей (межгрупповой) дисперсии								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
6	5,99	5,14	4,76	3,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
12	4,75	3,88	3,40	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2.96	2,85	2,77	2,70	2,65
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,59	2,51	2,46
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,61	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы, *v*	Уровень значимости, α (двусторонняя критическая область)		Число степеней свободы к	Уровень значимости, α (двусторонняя критическая область)	
	0,05	0,01		0,05	0,01
1	12,7	63,7	18	2,10	2,88
2	4,30	9,92	19	2,09	2,86
3	3,18	5,84	20	2,09	2,85
4	2,78	4,60	21	2,08	2,83
5	2,57	4,03	22	2,07	2,82
6	2,45	3,71	23	2,07	2,81
7	2,36	3,50	24	2,06	2,80
8	2,31	3,36	25	2,06	2,79
9	2,26	3,25	26	2,06	2,78
10	2,23	3,17	27	2,05	2,77
11	2,20	3,11	28	2,05	2,76
12	2,18	3,05	29	2,05	2,76
13	2,16	3,01	30	2,04	2,75
14	2,14	2,98	40	2,02	2,70
15	2,13	2,95	60	2,00	2,66
16	2,12	2,92	120	1,98	2,62
17	2,11	2,90	>120	1,96	2,58

СОДЕРЖАНИЕ